Zahlbereiche

"ist definiert als"

$\mathbb{N} := \{1,2,3,\dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen

$\subseteq$ "ist Teilmenge von"

$\mathbb{N}_0 := \{0,1,2,3,\dots\}$

$\subseteq$

$\mathbb{Z} := \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$ Menge der ganzen Zahlen

$\subseteq$

$\overset{!}{}\; b \neq 0$

$\mathbb{Q} := \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{N}\}$ Menge der rationalen Zahlen

$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

$\subseteq$

$\mathbb{R}$. Menge der reellen Zahlen

reelle Zahlen lassen sich als unendliche Dezimalbrüche schreiben: $4{,}2372\dots$

$\pi = 3{,}141\dots$

Die Inklusionen $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{N}_0 \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$ sind strikt

"ist Teilmenge, allerdings nicht gleich"

"ohne"

Bsp: $0 \in \mathbb{N}_0 \setminus \mathbb{N}$, $-1 \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$, $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Proposition: Es existiert keine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$, sodass $x^2 = 2$.

"aus", "Element von"

Beweis: Angenommen, es existiert in solches x

Dann $x = \frac{a}{b}$ mit $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ und a, b <u>teilerfremd</u>

(a, b teilerfremd bedeutet: $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, sodass $n \mid a$, gilt $n \nmid b$)

"Für alle" "teilt" "teilt nicht"

Aus $x^2 = 2$ folgt $\frac{a^2}{b^2} = 2$, d.h. $a^2 = 2b^2$

Also $2 \mid a^2$.

Aber 2 ist eine <u>Primzahl</u>, daher $2 \mid a$.

(2 hat genau zwei Teiler in $\mathbb{N}$, nämlich 1, 2)

Schreibe $a = 2a'$ mit $a' \in \mathbb{Z}$

Dann gilt $\underset{2b^2}{\overset{\parallel}{a^2}} = (2a')^2 = 4a'^2$, also $b^2 = 2(a')^2$

Damit folgt $2 \mid b$ Widerspruch zur Annahme, dass a, b teilerfremd sind ↯

$\square$

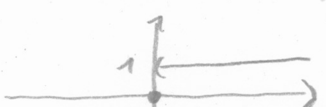
"Beweis zu Ende"

Klar:

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind geordnet: $\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ positiv, d.h. } x > 0\}$

Auf $\mathbb{R}$ gibt es die Vorzeichen- oder Signumsfunktion

$$\underset{\mathbb{R}}{\operatorname{sgn}(x)} := \begin{cases} +1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$



$\mathbb{R}_{\geq 0} = \mathbb{R}_{>0} \cup \{0\}$

"vereinigt"

$\mathbb{R}_{<0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ negativ}\}$
$= \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in \mathbb{R}_{>0}\}$

Jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ hat einen Betrag:

$$|x| := \operatorname{sgn}(x) \cdot x$$

"Abstand zur 0 auf der reellen Zahlengerade"

Potenzrechnen

Sei $y \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ ist definiert

$$y^n := \underbrace{y \cdot \ldots \cdot y}_{n\text{-mal}}$$

Es gilt: 1) $y^{n+m} = y^n \cdot y^m$

2) $(y^n)^m = y^{n \cdot m}$

Wir wollen das Potenzieren auf reelle Exponenten erweitern, sodass die Rechenregeln 1), 2) erhalten bleiben.

Dazu müssen wir annehmen, dass $y > 0$, also y positiv, ist.

Was soll y^0 sein?

$$y^n = y^{n+0} \overset{1)}{=} y^n \cdot y^0$$, d.h. es muss $y^0 = 1$ gelten, denn $y^n \neq 0$ für $n \in \mathbb{N}$.

Definition: $y^0 := 1$

Was soll y^{-n} für $n \in \mathbb{N}$ sein?

$$1 = y^0 = y^{n-n} \overset{1)}{=} y^n \cdot y^{-n}$$, d.h. es muss $y^{-n} = \frac{1}{y^n}$ gelten.

Beachte $y^n \neq 0$, da $y > 0$ angenommen war.

Definition: $y^{-n} := \frac{1}{y^n}$

Was soll $y^{\frac{n}{m}}$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ sein?

$(y^{\frac{n}{m}})^m \overset{2)}{=} y^{\frac{n}{m} \cdot m} = y^n$, d.h. es muss gelten $y^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{y^n}$

Satz: Sei $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine <u>nicht negative</u> reelle Zahl und $m \in \mathbb{N}$.

Dann existiert eine eindeutige Zahl $z \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, sodass

$$z^m = x$$

Schreibweise: $z = \sqrt[m]{x}$ "m-te Wurzel aus x"

(wird in dieser VL nicht bewiesen

Wichtig: Gilt nicht für $m = 2$ und $x \in \mathbb{R}_{<0}$, negative Zahlen besitzen keine Quadratwurzel, denn Quadratzahlen sind immer positiv!

Für $x, x' \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt: $\sqrt[m]{x \cdot x'} = \sqrt[m]{x} \cdot \sqrt[m]{x'}$, denn $z := \sqrt[m]{x} \cdot \sqrt[m]{x'} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $z^m = x \cdot x'$.

Definition: $y^{\frac{n}{m}} := \sqrt[m]{y^n}$ für $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$

Beachte: $y > 0$ war Voraussetzung!

Seien $a, b \in \mathbb{Q}$. Es gilt weiterhin

1) $y^{a+b} = y^a \cdot y^b$, 2) $(y^a)^b = y^{a \cdot b}$.

Dies muss allerdings bewiesen werden:

Zu 1): Schreibe $a = \frac{n}{m}$, $b = \frac{k}{l}$, $n, k \in \mathbb{Z}$, $m, l \in \mathbb{N}$

Dann $a + b = \dfrac{ln + mk}{m \cdot l}$, also

$$y^{a+b} = \sqrt[m \cdot l]{y^{ln+mk}} = \sqrt[ml]{y^{ln}} \cdot \sqrt[ml]{y^{mk}} = \left(\sqrt[ml]{y}\right)^{ln} \cdot \left(\sqrt[lm]{y}\right)^{mk}$$

$$= \Big(\underbrace{\left(\sqrt[ml]{y}\right)^{l}}_{= \sqrt[m]{y},}\Big)^n \cdot \Big(\underbrace{\left(\sqrt[lm]{y}\right)^{m}}_{= \sqrt[l]{y}}\Big)^k = \left(\sqrt[m]{y}\right)^n \cdot \left(\sqrt[l]{y}\right)^k = y^{\frac{n}{m}} \cdot y^{\frac{k}{l}} = y^a \cdot y^b.$$

denn $z := \left(\sqrt[ml]{y}\right)^l \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $z^m = y$

2) Übungsaufgabe

Tatsächlich lässt sich y^α auch für $y>0$, $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren (Idee approximiere α durch rationale Zahlen)

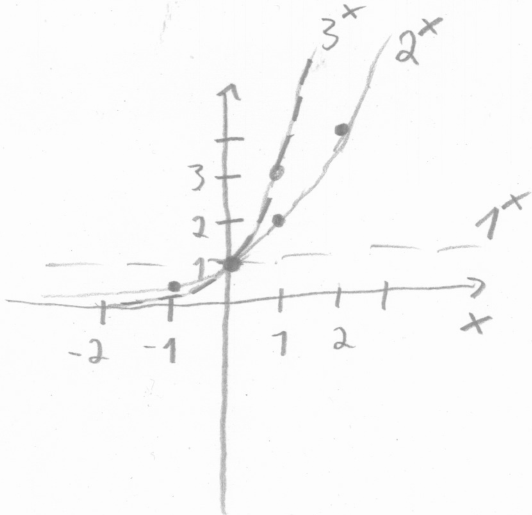
Zusammenfassung:

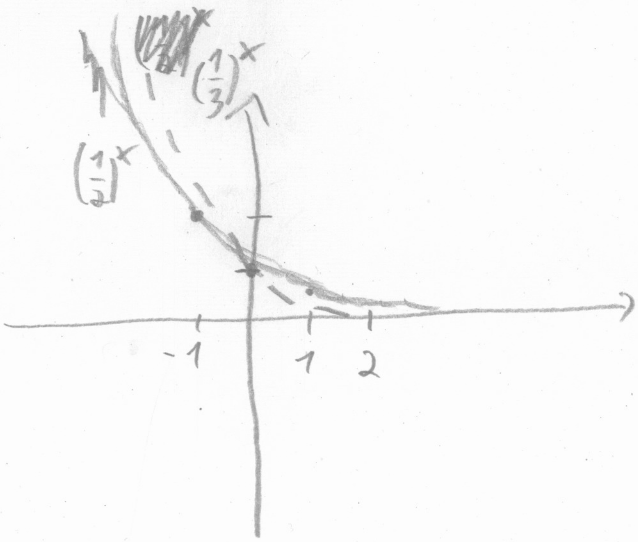
Sei $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$, $a, b \in \mathbb{R}$

Dann $(xy)^a = x^a y^a$, $x^{a+b} = x^a \cdot x^b$, $(x^a)^b = x^{ab}$, $x^0 = 1$

$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

Bsp:





Logarithmisches Rechnen

Definition: Für $x>0$ ist der 10er- oder dekadische Logarithmus $\log_{10}(x)$ definiert als die eindeutige Zahl, sodass $10^{\log_{10}(x)} = x$

Allgemeiner: Sei $b > 0$.

Dann $\log_b(x)$ definiert via $b^{\log_b(x)} = x$

für $x > 0$. "Logarithmus zur Basis b"

Bsp: $10^2 = 100$, also $\log_{10}(100) = 2$

$10^3 = 1000$, also $\log_{10}(1000) = 3$

$10^{-1} = 0{,}1$, also $\log_{10}(0{,}1) = -1$

$2^3 = 8$, also $\log_2(8) = 3$

Prop.: Fixiere $b > 0$. Dann gilt für $x, x' \in \mathbb{R}_{>0}$, $a \in \mathbb{R}$

1) $\log_b(x \cdot x') = \log_b(x) + \log_y(x')$

2) $\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_b x$

3) $\log_b(x^a) = a \cdot \log_b(x)$

4) $\log_b(1) = 0$

Beweis: 1) Es gilt

$$b^{(\log_b(x) + \log_b(x'))} \overset{\text{Rechenregeln fürs Potenzieren}}{=} b^{\log_b(x)} \cdot b^{\log_b(x')} \underset{\text{Def. von } \log_b}{=} x \cdot x'$$

Damit folgt $\log_b(x \cdot x') = \log_b(x) + \log_b(x')$

nach der Definition von $\log_b$.

2), 3), 4) Übung.

Anwendung: Zur Zeit beträgt das Bevölkerungswachstum der Erde ca. 1,15% pro Jahr und es leben ca. 7,6 Milliarden Menschen auf der Erde.

Wann gibt es dann (ca.) 10 Milliarden Menschen?

Antwort: Nach n Jahren gibt es ca.

$(1{,}0115)^n \cdot 7{,}6$ Milliarden Menschen

D. h. gesucht ist n, sodass

$$(1{,}0115)^n \cdot 7{,}6 = 10$$

Logarithmieren dieser Gleichung ergibt

$$1 = \log_{10}(10) = \log_{10}\left((1{,}0115)^n \cdot 7{,}6\right) = n \cdot \log_{10}(1{,}0115) + \log_{10}(7{,}6)$$

also $$n = \frac{\log_{10}(10) - \log_{10}(7{,}6)}{\log_{10}(1{,}0115)} \approx 24$$

und die Antwort lautet: In ca. 24 Jahren