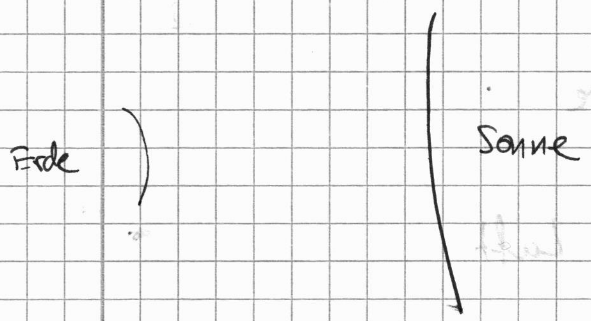
16.10.19

Klimamodell:



- Nehmen an, dass Erde konstant von Sonne bestrahlt wird
- Intensität ist bestimmt durch Solarkonstante $S \approx 1367 \frac{W}{m^2}$
- Erde strahlt auch selbst Energie ab. Wir betrachten die Energiebilanz

$$E_{in} = (1-\alpha) \cdot A_{bestr.} \cdot S \cdot \Delta t$$

$$E_{out} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot A_{Erde} \cdot \Delta t$$

Hierbei ist Δt ein kleiner Zeitschritt, und

α : Albedo, beschreibt reflektierten Anteil der Strahlung

A_{best} : πr_{Erde}^2, Fläche des „Erdschattens"

S : Solarkonstante

ε : Emissivität der Erde

σ : Stefan-Boltzmann-Konstante

T : Erdtemperatur

A_{Erde} : $4\pi r_{Erde}^2$

- Gesamtenergie der Erde ist gegeben durch

$$E_{Erde} = V_{Atmos} \cdot \rho \cdot C \cdot T = 4\pi r_{Erde}^2 H \rho C T, \quad \text{wo}$$

V_{Atmos} : Volumen der Atmosphäre
H : „Dicke" der Atmosphäre
ρ : Luftdichte
C : spez. Wärmekapazität von Luft
T : Erdtemperatur

- Im gewählten Zeitschritt Δt können wir die Veränderung in der Gesamtenergie der Erde betrachten

$$\Delta E_{Erde} = E_{in} - E_{out}$$
$$\parallel$$
$$4\pi r_{Erde}^2 H \rho C \cdot \Delta T$$

Nach ΔT umgestellt, erhalten wir

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{E_{in} - E_{out}}{4\pi r_{Erde}^2 H \rho C} = \frac{(1-\alpha)\pi r_{Erde}^2 S - \varepsilon \sigma T^4 \cdot 4\pi r_{Erde}^2}{4\pi r_{Erde}^2 H \rho C}$$

- Nun betrachten wir den Grenzwert $\Delta t \to 0$, so dass aus der Veränderung der Temperatur zwischen zwei diskreten Zeitpunkten die infinitesimale Änderungsrate, i.e. Ableitung der Temperatur wird.

$$\rightarrow \quad \frac{dT}{dt} = \frac{1}{\rho H c}\left(\frac{1-\alpha}{4}S - \varepsilon \sigma T^4\right)$$

Diese Gleichung erlaubt es uns, einige Eigenschaften der Temperaturentwicklung zu betrachten. Wir stellen folgendes fest:

- Gehen wir aus einem Zustand aus, wo T^* gewählt ist, so dass

$$\frac{1-\alpha}{4}S - \varepsilon \sigma T^{*4} = 0,$$

so folgt

$$\frac{dT}{dt} = 0$$

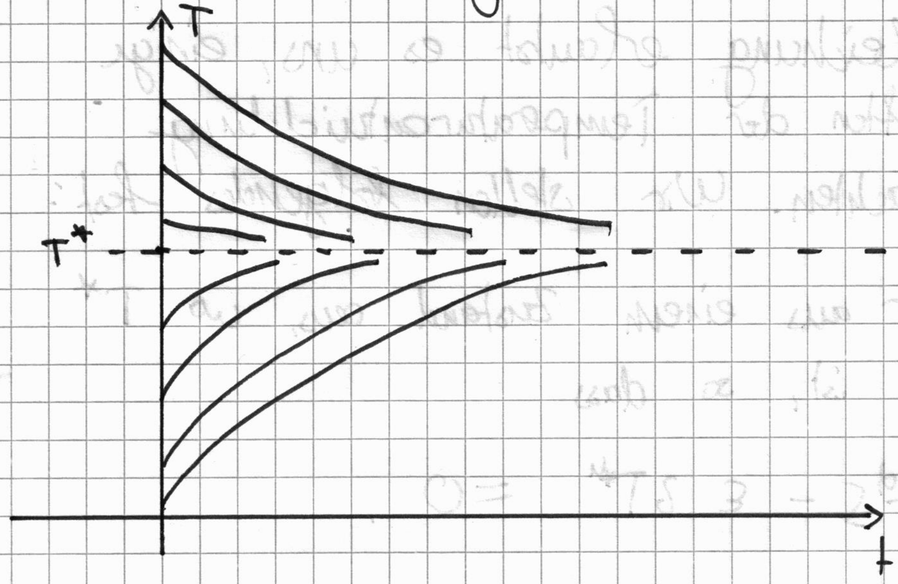
→ in diesem „Gleichgewichtszustand" verändert sich die Temperatur nicht

- Ist $T < T^*$, folgt $\frac{dT}{dt} > 0$, d.h. die Erde erwärmt sich
- Ist $T > T^*$, folgt $\frac{dT}{dt} < 0$, d.h. die Erde kühlt ab

⇒ Die Differentialgleichung wirkt wie eine „Rückstellkraft" zum Gleichgewicht!

Die Temperatur wird „von 0 und ∞ ferngehalten".

· können viele verschiedene Anfangsdaten betrachten und dann Dynamik betrachten



→ von rein qualitativen Überlegungen ausgehend erwarten wir, dass die Temperatur sich zum Gleichgewichtszustand entwickelt.

Zahlen und Mengen

· Mengen können axiomatisch definiert werden, wir betrachten sie aber als Sammlungen von Objekten, wie

$\{1\}, \{a,b,c\}, \emptyset, \{\{1\}, \{a,b,c\}, \emptyset\}$, etc...

· Ebenfalls nehmen wir die natürlichen Zahlen

$\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$

und die Operation $+$ darauf als gegeben an.

Wir können nun Beziehungen zwischen Objekten betrachten.

Definition (Kartesisches Produkt):

Seien X, Y Mengen. Dann ist

$$X \times Y := \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

Definition (Relation):

Sei X eine Menge. Eine Relation auf X ist eine Teilmenge

$$A \subseteq X \times X$$

Wir können dann schreiben, falls $x, y \in X$,

$$y \sim x :\Longleftrightarrow (y,x) \in A$$

Definition (Äquivalenzrelation):

Sei X eine Menge mit Relation $\sim$. Diese heißt Äquivalenzrelation, falls folgende drei Eigenschaften gelten:

1) $\forall x \in X: \quad x \sim x$ (Reflexivität)
2) $\forall x, y \in X: \quad x \sim y \Longleftrightarrow y \sim x$ (Symmetrie)
3) $\forall x, y, z \in X: \quad x \sim y \wedge y \sim z \Longrightarrow x \sim z$ (Transitivität)

Beispiele hierfür sind „=" bei Zahlen, oder „hat den gleichen Geburtstag" bei Personen

Definition (Äquivalenzklasse):

Sei X eine Menge mit Äquivalenzrelation $\sim$. Wir schreiben, für $x \in X$:

$$[x]_\sim := \{ y \in X \mid y \sim x \}$$

Hiermit zerfällt X in Äquivalenzklassen. Falls klar ist, welche Relation gemeint ist, können wir auch $[x] \equiv [x]_\sim$ schreiben.

Konstruktion der ganzen Zahlen

- Wir betrachten nun $X := \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$, i.e. Zahlenpaare (a,b), wo $a,b \in \mathbb{N}_0$.
- Wir wollen Differenzen darstellen. Hierzu stellen wir zur Motivation fest, dass in unserer Konzeption der ganzen Zahlen

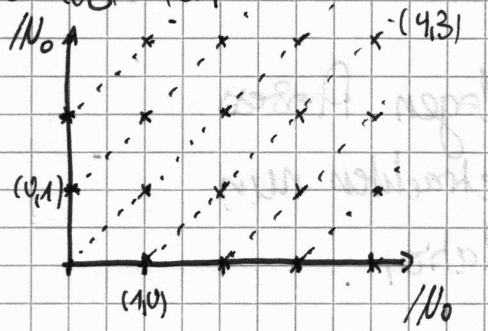
$$„a-b = c-d \iff a+d = b+c"$$

- Vor diesem Hintergrund definieren wir die folgende Relation auf X:

$$(a,b) \sim (c,d) :\iff a+d = b+c$$

denke: „a-b"

Die können wir bildlich wie folgt darstellen:



Wir definieren

$$\mathbb{Z} := \{ [(a,b)] \mid a,b \in \mathbb{N}_0 \},$$

wobei

1) $\forall a \in \mathbb{N}_0: \quad [(a,a)] = [(0,0)] \equiv 0$

2) $\forall a,x \in \mathbb{N}_0: \quad [(a+x,x)] = [(a,0)] \equiv a$

2) $\forall a,x \in \mathbb{N}_0: \quad [(x,a+x)] = [(0,a)] \equiv -a$

Desweiteren setzen wir

$$[(a,b)] + [(a',b')] := [(a+a',b+b')]$$

$$[(a,b)] \cdot [(a',b')] := [(aa'+bb', ab'+a'b)]$$

Zuletzt definieren wir

$$a-b := a + (-b)$$

und haben damit unsere gewohnten Operationen auf $\mathbb{Z}$ zurückgewonnen.

Konstruktion von $\mathbb{Q}$

Wir können jetzt einen analogen Prozess mit $\mathbb{Q}$ durchlaufen. Wir betrachten nun $X := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\neq 0}$ mit der Relation

$$(a,b) \sim (c,d) :\Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c \, ,$$

erhalten wieder die Äquivalenzklassen, und setzen

$$\mathbb{Q} := \{ [(a,b)] \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}_{\neq 0} \}$$

Motivierend hierfür ist die Feststellung, dass in unserer Schulkonzeption von rationalen Zahlen gilt, dass

$$„ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c "$$

In dieser Schreibweise können wir auch verfahren, wenn wir definieren

$$\frac{a}{b} := [(a,b)] \quad , \quad \text{und}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \, ,$$ wobei wir feststellen, dass

1) $\forall a \in \mathbb{Z}_{\neq 0}: \quad \frac{a}{a} = \frac{1}{1} \equiv 1$

2) $\forall a,b \in \mathbb{Z}_{\neq 0}: \quad \frac{0}{a} = \frac{0}{b} \equiv 0$

3) $\forall a \in \mathbb{Z} \; \forall b,c \in \mathbb{Z}_{\neq 0}: \quad \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$

Damit haben wir die rationalen Zahlen konstruiert.