Eigenschaften von Funktionen

$D \subseteq \mathbb{R}$ offenes oder abgeschlossenes Intervall

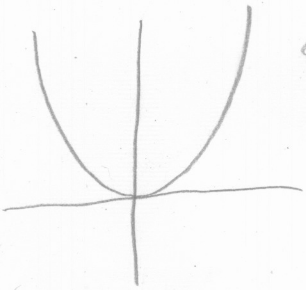
$f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$

Def: 1) f heißt stetig in x_0, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass aus $|x - x_0| < \delta$ folgt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

2) f stetig, wenn f stetig in jedem Punkt von D.

Intuition: Man kann f ohne abzusetzen zeichnen.

Bsp:



← stetig in allen Punkten

$f: D = \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$

Sauberer Beweis: Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$.

Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig.

Dann

$$|x^2 - x_0^2| = |(x - x_0)(x + x_0)| = |(x - x_0)| \cdot |(x + x_0)|$$

$$\leq |(x - x_0)| \cdot (|x| + |x_0|)$$

Dreiecksungleichung

$|a + b| \leq |a| + |b|$

Setze $\delta := \min\left\{ \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1}, 1 \right\}$. Dann $\delta > 0$

Ist $|x - x_0| < \delta$, so folgt $|x| \le |x_0| + \delta$.

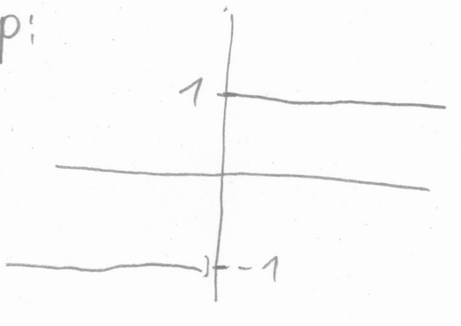
D.h.

$$|x - x_0| \cdot (|x| + |x_0|) \le |x - x_0| (2|x_0| + \delta) \overset{\delta \le 1}{\le} |x - x_0| (2|x_0| + 1)$$

$$\underset{|x - x_0| < \delta}{<} \delta (2|x_0| + 1) \le \frac{\varepsilon}{2|x_0|+1} \cdot (2|x_0| + 1) = \varepsilon.$$

Es gilt: $f: D \to \mathbb{R}$ nicht stetig im Punkt $x_0 \in D$, wenn ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass für alle $\delta > 0$ ein $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$ existiert, sodass $|f(x) - f(x_0)| \ge \varepsilon$

Bsp:



nicht stetig in $x_0 = 0$.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1, & x \ge 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

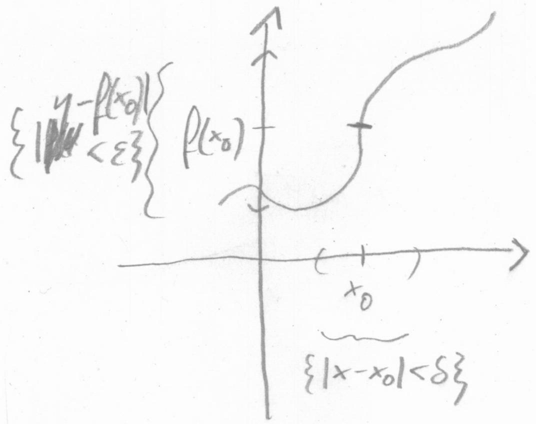
Sauberer Beweis: Wähle $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$.

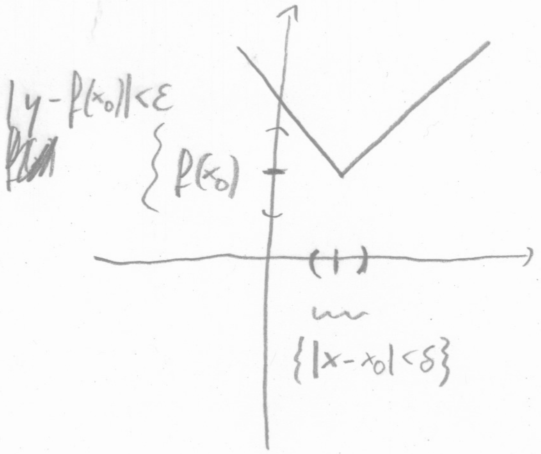
Sei $\delta > 0$ und $x < 0$ mit $|x| < \delta$.

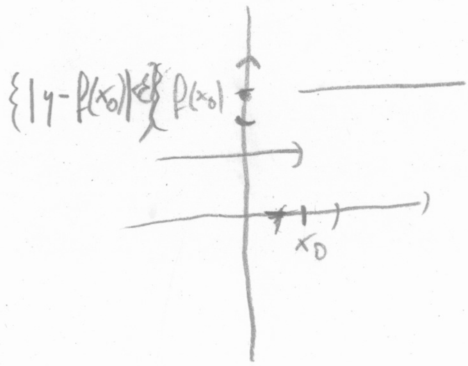
Dann $|x - \underbrace{x_0}_{=0}| = |x| < \delta$ und $f(x) = -1$, $f(x_0) = 1$

D.h. $|f(x) - f(x_0)| = |-1-1| = 2 \geq \varepsilon = \frac{1}{2}$ ↯

Veranschaulichung des ε-δ-Kriteriums:







Blatt 3a: Summe stetiger Funktione sind wieder stetig

Zwischenwertsatz: Sei D ein Intervall und $f: D \to \mathbb{R}$ stetig

Es seien $a, b \in D$ und $a < b$ und $f(a) < f(b)$ (bzw. $f(a) > f(b)$).

Sei y beliebig mit $f(a) \leq y \leq f(b)$. Dann existiert ein c mit

(bzw. $f(b) > y > f(a)$)

$f(c) = y$

Proposition: Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig (3a)

Dann ist $f+g : D \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)+g(x)$

wieder stetig.

Beweis: Sei $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$

Dann existieren nach Voraussetzung $\delta_1, \delta_2 > 0$, sodass

$$|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

weil f, g stetig in x_0 sind.

Setze $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Dann $\delta > 0$. Sei $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$.

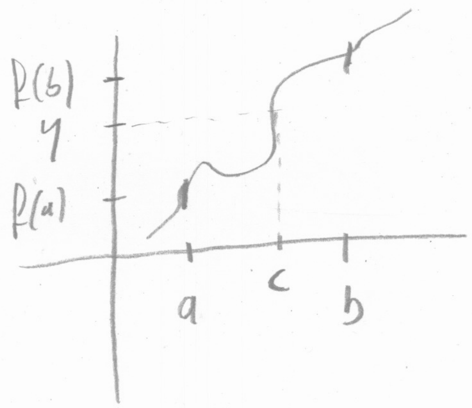
Dann folgt

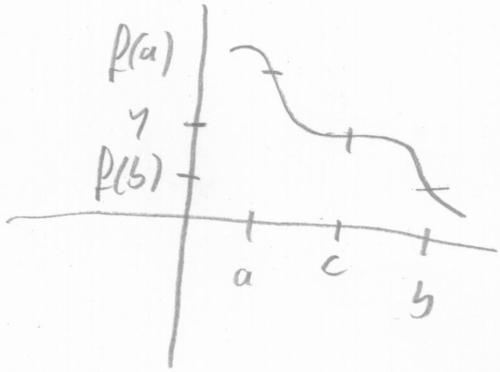
$$|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| \overset{\text{Def. von } f+g}{=} |f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)| \overset{\text{Dreiecksungl.}}{\leq} |f(x)-f(x_0)| + |g(x)-g(x_0)|$$

$$\underset{|x-x_0|<\delta\leq\delta_i,\ i=1,2}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Also ist $f+g$ stetig in x_0

$\square$





(c ist nicht eindeutig)

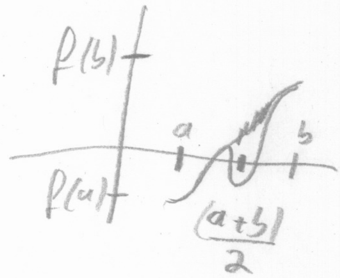
Nullstellen

$D = [a,b]$ Intervall, $f: D \to \mathbb{R}$ Funktion.

Def: $x \in D$ heißt Nullstelle von f, wenn $f(x) = 0$

Intervallschachtelungsverfahren:

Angenommen f stetig und $f(a) < 0$, $f(b) > 0$



Der Zwischenwertsatz impliziert, dass ein ~~c~~ $a < c < b$ existiert mit $f(c) = 0$

Betrachte Mittelpunkt $x_1 = \frac{1}{2}(a+b)$.

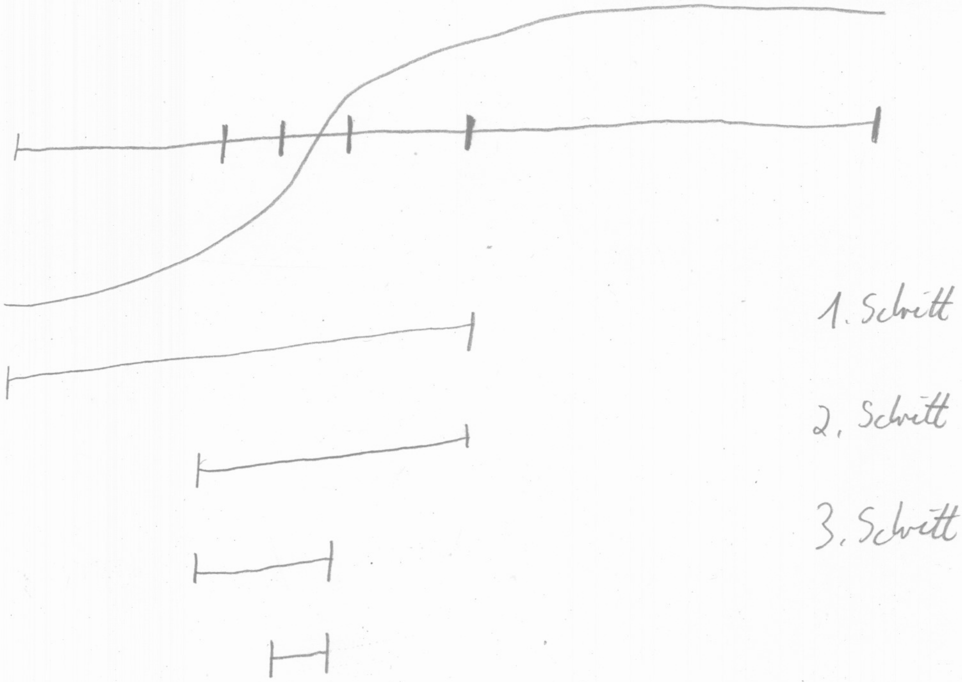
Ist $f(x_1) = 0$ hat man eine Nullstelle gefunden.

Ist $f(x_1) > 0$, so existiert eine Nullstelle im Intervall $[a, x_1]$

Ist $f(x_1) < 0$, - - - - - - - - - - - - - - - - $[x_1, b]$

D.h. fahre fort mit $x_2 = \frac{1}{2}(a + x_1)$, bzw. $x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + b)$

Dieses Verfahren konvergiert gegen eine Nullstelle von f.



Extremwerte von Funktionen

$f: D \to \mathbb{R}$ Funktion

Def: f hat ein Maximum in $x_0 \in D$, wenn für alle $x \in D$ gilt $f(x_0) \geq f(x)$

— — Minimum — — — — — — — — — — $f(x_0) \leq f(x)$.

Bsp: $f(x) = x^2$ hat Minimum in $x = 0$.

Minima/Maxima müssen nicht existieren: $f(x) = ax + b$ (mit $a \neq 0$)

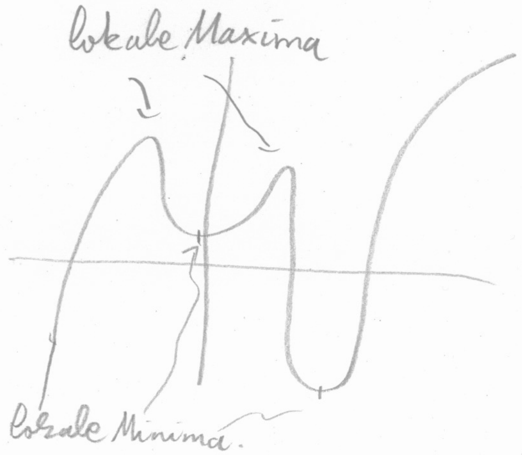
oder $f(x) = \frac{1}{x}$

Interessant: lokale Maxima/Minima. hier $f(x_0) \geq f(x)$

$f(x_0) \leq f(x)$

nur für x nah bei x_0

Bsp:



Elementare Funktionen

Ein Polynom ist ein Ausdruck wie

$$3x-4,\quad x^2+5,\quad x^4-3x^2+7x,$$

allgemein

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0,$$

wobei $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ("die Koeffizienten von p")

Ist $a_n \neq 0$, so ist n der Grad von p.

Speziell:

$n = 1$ lineare Funktionen

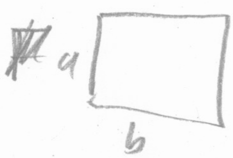
$n = 2$ quadratische Parabel

Wichtige Eigenschaften von Polynomen:

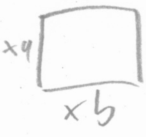
- Der Definitionsbereich von Polynomen ist ganz $\mathbb{R}$
- Summe, Differenzen und Produkte von Polynomen ist wieder ein Polynom
- Polynomfunktionen sind stetig
- Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

Flächeninhalte verhalten sich ungefähr wie x^2

Volumina — — — — — wie x^3

Genauer: Ist 

ein Rechteck, Flächeninhalt $ab = F$



um x gestrecktes Rechteck, Dann ist der neue Flächeninhalt $x^2 \cdot a \cdot b = x^2 \cdot F$

Rationale Funktionen sind Quotienten von Polynomen wie ⑦

$$\frac{1}{1+x}, \quad \frac{x^2}{1-x}, \quad \frac{3x-7}{6x^4-8x^2+5}$$

allgemein

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \quad p(x), q(x) \text{ Polynome } (q(x) \neq 0)$$

Sie sind nur da definiert, wo $q(x)$ keine Nst. hat.

~~[illegible]~~