Mathematik für Geowissenschaftler

Zeit/Ort: Vorlesung, Do, 14 c.t. – 16 Uhr, Zeichensaal

Ergänzungsvl., Mi, 17:30 – 19 Uhr, Schloß/Steinmann HS Mineralogie (Marc Vaisband)

Übung, Di 16 c.t. – 18 Uhr, NO.007 Nebengebäude des Math. Instituts (Erik Sturzenhecker)

Homepage: www.math.uni-bonn.de/people/ja/mfgeow/

Übung: Anmeldung via eCampus

Klausur: Anmeldung via Basis

Übungsblätter, siehe Homepage

Worum geht die Vorlesung?

reine/angewandte Mathematik = Wissenschaft vom Lösen von Gleichungen

Bsp 1: Fermats letzter Satz (formuliert im 17. Jahrhundert, bewiesen 1994 von Andrew Wiles)

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$ eine $\boxed{\text{natürliche Zahl}}$, $n \geq 3$

Dann besitzt die Gleichung

$x^n + y^n = z^n$ keine Lösung mit $x, y, z \in \mathbb{N}$, $x, y, z > 0$

Bem.: * Es gibt unendliche viele $\boxed{\text{reelle Lösungen}}$.

* $n = 2$: Es gibt unendlich viele $\boxed{\text{rationale/ganzzahlige}}$ Lösungen (Übung) der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$

$\boxed{\;....\;}$ = wird in der VL behandelt

$\mathbb{N}$ = Menge der natürlichen Zahlen = $\{1, 2, 3, 4, \ldots$

(manchmal $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$)

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ = Menge der natürlichen Zahlen $= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Teilmenge

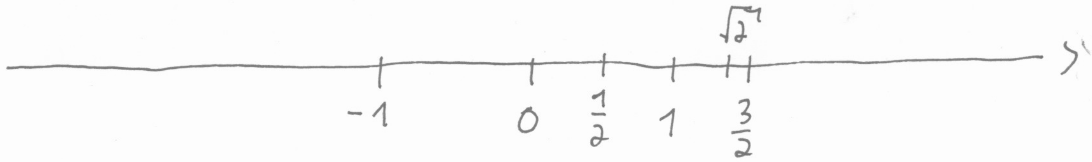
$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ = Menge der rationalen Zahlen $= \{\ldots, -3, -\frac{1}{2}, -5, 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{21}{7}, \ldots\}$

$$= \left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}$$

⚠ $b \neq 0$

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen $= \{\ldots, -3, -\frac{1}{2}, \sqrt{2}, \pi, e, \ldots\}$

reelle Zahlengerade:



Im Beispiel 1

"Gleichung" = algebraische Gleichung mit ganzzahligen Koeff.

aus Multiplikation / Addition gebildet

"Lösung" = natürliche / ganz~~[illegible]~~e Zahlen (die geg. Gleichung erfüllen)

Diese Klasse von Gleichungen ist Thema der algebraischen Zahlentheorie, nicht dieser Vorlesung.

Bsp. 2: Exponentielles Wachstum

Einige Vorgänge werden durch eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{d}{dt} y(t) = c \cdot y(t) \qquad ; c \in \mathbb{R}$$

beschreiben, z.B. Wachstum der Weltbevölkerung: $y(t)$ = Anzahl der Menschen zum Zeitpunkt t

Zerfall radioaktiver Atome: $y(t)$ = Anzahl radioaktiver Atome zur Zeit t

Hier: $\frac{d}{dt} y(t)$ = $\boxed{\text{Ableitung}}$ von ~~y~~ der $\boxed{\text{Funktion}}$ nach t

~~Konkret: y(t) = Weltbevölkerung zum Zeitpunkt t~~

~~Bevölkerungswachstum ≈ 1,1%, d.h.~~

~~für ein festes Zeitintervall Δt~~

Die Lösungen der Gleichung "$\frac{d}{dt} y(t) = c y(t)$"

sind von der Form $y(t) = a \cdot e^{ct}$, mit $a \in \mathbb{R}$, e = Eulersche Zahl $\approx 2{,}71$

d.h. $\boxed{\text{Exponentialfunktionen}}$

Bsp. 3: Strahlungsbilanzmodell der Erde

Strahlung der Sonne $= S$

Solarkonstante $\approx 1367 \frac{W}{m^2}$

D.h. in einem Zeitintervall Δt strahlt die Sonne (pro Quadratmeter)

$S \cdot \Delta t$ ab.

In Δt eintreffende Energie auf der Erde

$$= S \cdot \Delta t \cdot A_{best.}$$

bestrahlte Fläche der Erde: $A_{best} = \pi \cdot r^2$, r = Erdradius ≈ 6371 km

π = Pi = Fläche des Einheitskreises $\approx 3{,}141$

Tatsächlich wird ein Teil reflektiert daher

$$E_{in} = (1-\alpha) A_{bestr.} \cdot S \cdot \Delta t$$

$$\text{Albedo} = \frac{\text{reflektierte Strahlung}}{\cancel{\text{absorbierte}}\ \text{eingehende Strahlung}}$$

Schnee: $\alpha \approx 0{,}9$

Wald: $\alpha \approx 0{,}1$

Erde (gemittelt): $\alpha \approx 0{,}3$

Je größer Albedo α, desto weniger Energie wird von der Erde absorbiert

Andererseits strahlt die Erde Energie ab. Im Zeitintervall

$$E_{out} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot A_{Erde} \cdot \Delta t$$

Hier: T = Temperatur der Erde (gemittelt)

A_{Erde} = Oberfläche der Erde $= 4\pi r^2$, r: Erdradius

σ = Stefan-Boltzmann-Konstante $= 5{,}67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$

(K Kelvin, $0\,K = -273°C$)

ε = Emissivität = stoffabhängige Zahl $0 \leq \varepsilon \leq 1$, die beschreibt wie ein Körper Energie abstrahlt

(Bsp: $\varepsilon = 1 \rightsquigarrow$ "schwarzer Strahler")

ε für Erde $\approx 0{,}62$

Hängt mit Treibhauseffekt zusammen

Im Gleichgewicht

$$E_{in} = E_{out} \qquad (\Rightarrow T \approx 287\,K \approx 14°C)$$

Ändert sich α (Schnee schmilzt, Bäume werden gepflanzt, ...)

oder ε (CO_2-Emission, ...)

ist $E_{in} \neq E_{out}$.

Wenn $E_{in} > E_{out}$ (z.B. ε sinkt), wird sich die Erde erwärmen: es gibt innerhalb der Zeit Δt eine Änderung ΔT der Temperatur.

Bei ~~T~~ der Temperatur T speichert die Erde Energie in der Atmosphäre (vorallem) (genauer der Troposphäre).

$$E_{Erde} = V_{Atmos} \cdot \varrho \cdot C \cdot T$$

Dicke der Atmosphäre ≈ 8,3 km

Hier: V_{Atmos} = Volumen der Troposphäre $= 4\pi r^2 \cdot H$

ϱ = Dichte der Luft $\approx 1{,}2\ \mathrm{kg/m^3}$

C = spezifische Wärme der Luft $\approx 10^3 \frac{J}{kg \cdot K}$

Im Zeitintervall Δt ändert sich die in der Erde gespeicherte Energie um $\Delta E_{Erde} = E_{in} - E_{out}$

Es gilt: $\Delta E_{Erde} = V_{Atmos} \cdot \varrho \cdot C \cdot \Delta T$

D.h. es gilt

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{E_{in} - E_{out}}{V_{atmos} \cdot \varrho \cdot C} = \frac{(1-\alpha) \cdot \pi r^2 \cdot S - \varepsilon \cdot \sigma T^4 \cdot 4\pi r^2}{4\pi r^2 \cdot H \cdot \varrho \cdot C}$$

Temperaturänderung ΔT im Zeitintervall Δt

Für $\boxed{\Delta t \to 0}$ geht $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ gegen $\frac{d}{dt} T(t)$, d.h.

Bei geg. α, ε wird T als Funktion von t durch die Differentialgleichung

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{H \varrho C} \left((1-\alpha) \cdot \frac{S}{4} - \varepsilon \cdot \sigma T^4 \right)$$

beschrieben, die (leider) viel komplizierter ist als $\frac{dy}{dt} = c$