Umkehrfunktionen

Sei f eine Funktion. Die Umkehrfunktion von f (falls existent) ordnet $y = f(x) \mapsto x$ zu.

Bsp: $f: [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$ hat Umkehrfunktion

$$f^{-1}: [0,\infty) \to \mathbb{R},\ \cancel{y}\,x \mapsto \sqrt{\cancel{y}\,x}$$

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, D Intervall.

Nimm an, dass f streng monoton fallend oder wachsend ist, d.h.

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

$$\text{oder } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Dann ist die Umkehrfunktion f^{-1} (⚠ Nicht zu verwechseln mit $\frac{1}{f(x)}$!) auf $f(D)$ definiert und

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

Bsp: $e^x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0},\ x \mapsto e^x$ hat Umkehrfunktion

$\log: \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \log(x)$, denn

$$e^{\log x} = x$$

Ebenso 10^x hat Umkehrfunktion $\log_{10}(x)$

Es gilt

$$f^{-1} \circ f(x) = x$$

$$\Rightarrow 1 \underset{\text{Kettenregel}}{=} (f^{-1} \circ f)'(x) = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x), \text{ d.h.}$$

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad (\text{wobei } f'(x) \neq 0 \text{ angenommen wird})$$

Schreibe $y = f(x)$, d.h. $x = f^{-1}(y)$

Dann $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

Bsp: $f(x) = e^x$, Dann $f'(x) = e^x$

$\Rightarrow \log'(e^x) = \dfrac{1}{e^x}$

Schreibe $y = e^x$. Dann gilt also

$$(\log)'(y) = \frac{1}{y}$$

Nenne y wieder x. Dann gilt

$$\log'(x) = \frac{1}{x}$$

Weitere Beispiele:

1) $f(x) = \sin(x)$ Dann $f'(x) = \cos(x)$

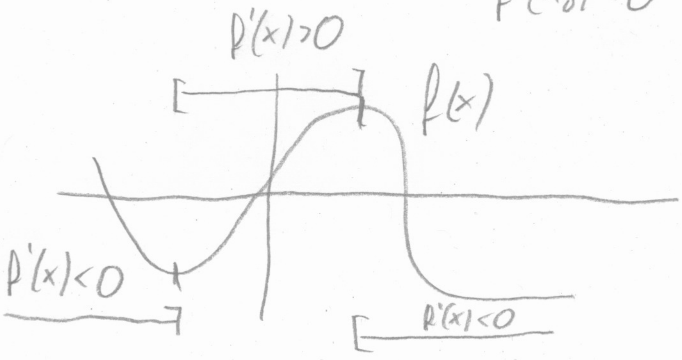
2) $f(x) = \cos(x)$ Dann $f'(x) = -\sin(x)$

(Dies macht Sinn, Skizziere die Ableitung!)

Der Mittelwertsatz

Erinnerung: f Funktion, $f'(x_0) > 0 \Rightarrow f$ steigt bei x_0 an

$f'(x_0) < 0 \Rightarrow f$ fällt bei x_0



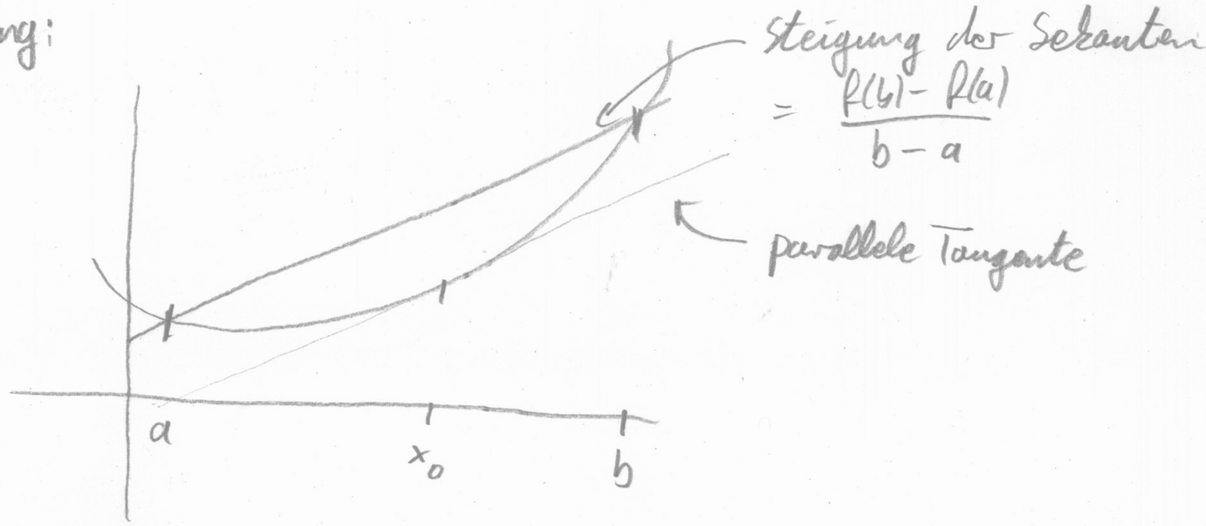
Satz (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

$[a,b] \subseteq D$, D (offenes) Intervall, $f: D \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion, $a<b$.

Dann existiert ein $x_0 \in$ mit $a < x_0 < b$ und

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Anschauung:



Anwendung: Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in D$, so ist $f(x)$ konstant

(d.h. ex. $a \in \mathbb{R}$, sodass $f(x) = a$ für alle $x \in D$)

Bew: Ang, es. ex. $a, b \in D$ mit $f(a) \neq f(b)$.

Dann existiert (MWS) ein x_0 mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \neq 0 \text{ . Widerspruch}$$

$\square$

Höhere Ableitungen

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist f' definiert und wieder differenzierbar, so heißt $f'' := (f')'$ die zweite Ableitung

$f''' := (f'')'$ die dritte usw.

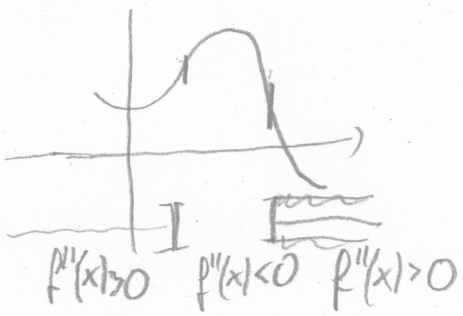
$f^{(n)}$ n-te Ableitung

Bsp: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$, $f'(x) = 3x^2 - 4x$, $f''(x) = 6x - 4$, ...

Geometrische Interpretation:

$f''(x_0) > 0 \Rightarrow f$ bei x_0 nach links gekrümmt

$f''(x_0) < 0 \Rightarrow f$ bei x_0 nach rechts gekrümmt



Extremwerte

Gegeben $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ hinreichend oft differenzierbar.

Gesucht lokale Maxima / Minima von f, d.h. lokale Extreme von f

Hat f in x_0 ein lokales Extremum, so gilt notw. $f'(x_0) = 0$

(wäre $f'(x_0) > 0$, wäre f lokal bei x_0 wachsend,

wäre $f'(x_0) < 0$, wäre f lokal bei x_0 fallend.

In beiden Fällen könnte f kein Extremum sein)

⚠ Aus $f'(x_0) = 0$ folgt <u>nicht</u>, dass f bei x_0 ein lokales Extremum hat.

Bsp: $f(x) = x^3$. Dann $f'(x) = 3x^2$, also $f'(0) = 0$.

Ist jedoch $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$, so ist x_0 ein lokales Minimum, weil f in x_0 linksgekrümmt ist. und x_0 eine Tangente parallel zur x-Achse hat

Ist $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)<0$, so ist x_0 ein lokales Maximum.

Zusammenfassung:

Satz: Sei $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und f'' stetig.

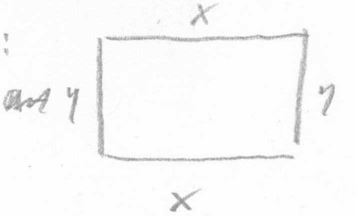
Dann gilt:

1) Hat $f(x)$ in x_0 ein lokales Extremum, so gilt $f'(x_0)=0$

2) Gilt $f'(x_0)$ und $f''(x_0)>0$ (bzw. $f''(x_0)<0$), so hat f in x_0 ein lokales Minimum (bzw. ein lokales Maximum).

Bsp.: Welches Rechteck mit Umfang a hat den größten Flächeninhalt?

Antwort:



Dann $2x+2y=a$, also $y=\frac{a}{2}-x$.

Der Flächeninhalt ist (in Abhängigkeit von x) gegeben durch $f(x)=x\cdot\left(\frac{a}{2}-x\right)=-x^2+\frac{a}{2}x$

Gesucht ist das Maximum von f.

Es gilt $f'(x)=-2x+\frac{a}{2}$

$\Rightarrow$ $x_0:=\frac{a}{4}$ ist einzige Nullstelle von f'

$f''(x)=-2$, d.h. x_0 ist ein Maximum.

$\Rightarrow$ Das Quadrat mit Seitenlänge $\frac{a}{4}$ maximiert den Flächeninhalt.