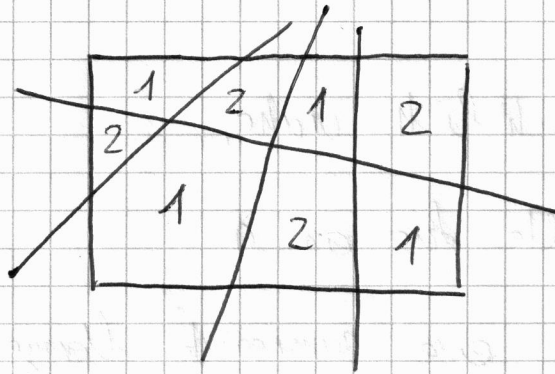


Mehr zur vollständigen Induktion

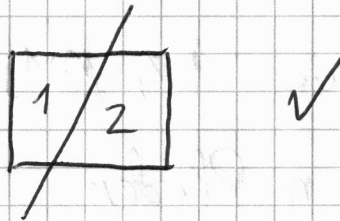
Beispiel: (Zweifärbung)

Beh.: Gegeben sei ein Rechteck, zerteilt durch n Linien. Dann kann man mit zwei Farben die Teile einfärben, so dass keine zwei benachbarten Teile dieselbe Farbe haben.



Bew.: Induktion über n

IA: $n=1$:

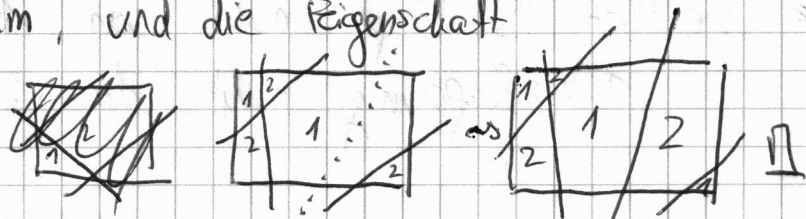


→ Die Aussage gelte für ein $n \in \mathbb{N}$:

IS: $n \rightsquigarrow n+1$

Sei das Rechteck durch n Linien zerteilt. ^(IH) → bekommen Färbung. Wir fügen eine Linie hinzu, die das Rechteck teilt.

→ Auf der einen Seite der Linie drehen wir alle Farben um, und die Eigenschaft bleibt erhalten.



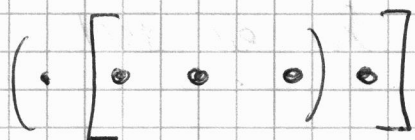
Beispiel: („Alle Pferde haben dieselbe Farbe“)

Hier gibt es, in einem Induktionsargument den Fehler zu finden.

Beh.: In jeder Menge von n Pferden haben alle Pferde dieselbe Farbe.

Bew.: Induktion.

- $n=1$: offensichtlich wahr,
- Die Aussage gelte für ein n
- $n \rightarrow n+1$ Betrachte eine nummerierte Menge $\{1, \dots, n+1\}$ von Pferden. Dann sind $\{1, \dots, n\}$ sowie $\{2, \dots, n+1\}$ jeweils Mengen von n Pferden



\Rightarrow diese haben unter sich dieselbe Farbe (IA)

\Rightarrow alle $n+1$ haben dieselbe Farbe

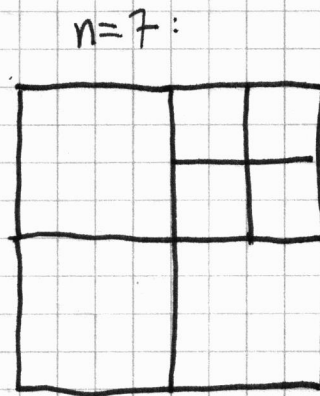
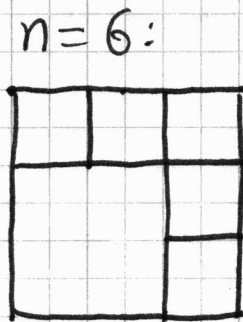
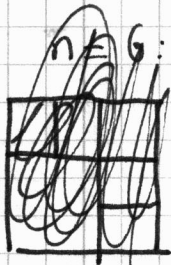
$\Rightarrow \square ?$

Fehler: IS klappt nicht von 1 nach 2, da Überlappung nicht da ist.

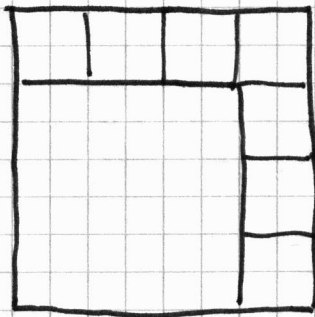
Beispiel: (n-Teilung des Quadrats)

Beh.: Falls $n \geq 6$, kann man ein Quadrat in n kleinere Quadrate zerlegen.

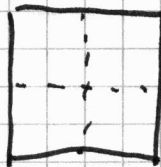
Bew.: Induktion mit modifiziertem Induktionsanfang



$n=8$:



IS: $n \rightarrow n+3$: Nehme beliebiges Quadrat, teile es in 4 Teile auf \rightarrow wir haben 3 mehr als vorher.



denn alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 6}$ werden so erreicht!

Beispiel (Induktion und Ungleichungen)

Beh.: $\forall n \geq 2: n^2 \geq 2n$

Bew. Induktion

• $n = 2: 4 \geq 4 \quad \checkmark$

• Die Aussage gelte für ein $n \in \mathbb{N}$ (IA)

• $n \rightsquigarrow n+1$

$$\begin{aligned} (n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1 \stackrel{IA}{\geq} 2n + 2n + 1 \\ &\geq 2n + 2 = 2(n+1) \quad \square \end{aligned}$$