Dr. J. Anschütz
Marc Vaisband

WS 2019/20

Mathematik für Geowissenschaftler

Sammlung von Übungsaufgaben

Die folgenden Aufgaben behandeln Fragestellungen, wie sie auch in der Klausur abgefragt werden können. Im Umfang entsprechen sie nicht einer möglichen Klausur. Für eine gute Klausurvorbereitung empfehlen wir von jeder Aufgabe mehrere Teilaufgaben zu bearbeiten.

Aufgabe 1:
Beweisen Sie per Induktion die Bernoulli'sche Ungleichung:

$$\forall x > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}: \ (1+x)^n \geq 1 + nx$$

Aufgabe 2:
Zeigen Sie für $n \geq 1$ per Induktion, dass

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

Aufgabe 3:
Das *Hermite-Polynom n-ten Grades* ist, für $n \in \mathbb{N}$, definiert als

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (\frac{d}{dx})^n e^{-x^2},$$

wobei $(\frac{d}{dx})^n e^{-x^2}$ die n-te Ableitung der Funktion e^{-x^2} bezeichnet.

a) Berechnen Sie zunächst explizit $H_0(x)$, $H_1(x)$, $H_2(x)$, und $H_3(x)$.

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass die Hermite-Polynome folgende Rekursionsgleichung erfüllen:

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) + H_n'(x).$$

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie von den folgenden Funktionen die erste und zweite Ableitung. Sofern nicht anders definiert, gilt $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) $f(x) = \sin(2x)$

b) $f(x) = 4x^2 - 2x + 3$

c) $f(x) = -xe^x$

d) $f(x) = e^{-x+1}$

e) $f(x) = \sqrt{e^x}$

f) $f(x) = \sin(e^x)$

g) $f(x) = \cos(\sin(x))$

h) $f(x) = \arctan(e^x)$

i) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

j) $f(x) = x + \cos(x)$

k) $f(x) = \xi r^x - \Theta x,\ \xi, r, \Theta > 0$

l) $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^x$

m) $f(x) = \sin(x^2 - x + 2)$

n) $f(x) = 4\ln(x^4 + 1)$

o) $f(x) = 7x^{100}$

p) $f(x) = \arcsin(\frac{e^x}{e^x+1})$

q) $f(x) = 4^x - 7$

r) $f(x) = 2x^e - \xi,\ \xi > 0$

s) $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^{(x^x)}$

t) $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x^x)^x$

u) $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ f(x) = 1 - \ln(x)$

v) $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ f(x) = 14/x$

w) $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{1/x}$

x) $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ f(x) = xe^{1/x}$

y) $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ f(x) = \ln(1/x)$

z) $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{\sin(x)+1+x}$

Aufgabe 5:
Entscheiden Sie zu den folgenden Funktionen, wo diese definiert sind, und bestimmen Sie dort die erste Ableitung:

a)
$$f(x) = \frac{4x^7 - 6x^4 + 3x^3 - 2}{x - 5}$$

b)
$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$$

c)
$$f(x) = \frac{x^2}{\sin(x)}$$

d)
$$f(x) = \frac{\ln(x)^4 + x}{x^2 - 2x + 1}$$

e)
$$f(x) = \frac{\arcsin(x^2)}{1 + x^2}$$

f)
$$f(x) = \frac{7 + x}{\sqrt{x} + 1 - 2x}$$

g)
$$f(x) = \frac{4x^3 + 9x^2}{x^2 - 7x - 3}$$

Aufgabe 6:
Entscheiden Sie für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ohne Begründung, ob sie konvergiert.

a)
$$a_n = (-1)^n$$

b)
$$a_n = \frac{n+1}{n^2}$$

c)
$$a_n = \frac{n+1}{n}$$

d)
$$a_n = n + 1$$

e)
$$a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

f)
$$a_n = \frac{n}{\sqrt{n} + 1}$$

g)
$$a_n = \frac{n^{1/7} - n^{1/8}}{\sqrt{n}}$$

h)
$$a_n = (-e^n)^n$$

i) a_n sei gegeben als

$$a_0 = 2$$
$$a_{n+1} = 3a_n + 1$$

Aufgabe 7:

Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen jeweils eine Stammfunktion. Sofern nicht anders definiert, gilt $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a)
$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 7$$

b)
$$f(x) = 2xe^{x^2}$$

c)
$$f(x) = 6\cos(3x)$$

d)
$$f(x) = 2\sin(2x)\cos(2x)$$

e)
$$f(x) = xe^x$$

f)
$$f(x) = 3x^2 e^{2x^3}$$

g)
$$f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt[5]{x} - 2$$

h)
$$f(x) = \frac{\sin(e^x)}{e^{-x}}$$

i)
$$f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{2x^2 + 1}{2x^3/3 + x}$$

j)
$$f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x+1}{x}$$

k)
$$f(x) = x\cos(x) + \sin(x)$$

l)
$$f(x) = \sqrt{e^x}$$

m)
$$f(x) = x\cos(x) + \sin(x)$$

n)
$$f(x) = x\cos(x) + \sin(x)$$

o)
$$f(x) = x\cos(x) + \sin(x)$$

p)
$$f(x) = 4x\cos(2-3x)$$

q)
$$f(x) = (3x+x^2)\sin(2x)$$

r)
$$f(x) = x^7\sin(x^4)$$

s)
$$f(x) = (2+5x)e^{x/3}$$

Aufgabe 8:
Gegeben sind jeweils zwei Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, sowie ein dritter Punkt $Q = (a_1, b_1)$. Stellen Sie jeweils die Geradengleichung der Gerade durch (x_1, y_1), (x_2, y_2) auf, bestimmen Sie deren Steigung, x-Achsen-Abschnitt (falls vorhanden), sowie y-Achsen-Abschnitt. Entscheiden Sie daraufhin, ob a_1, b_1 auf der Geraden liegt.

a)
$$\begin{aligned} P_1 &= (0,1) \\ P_2 &= (1,1) \\ Q &= (5,1) \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} P_1 &= (0,0) \\ P_2 &= (4,7) \\ Q &= (5,6) \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} P_1 &= (3,6) \\ P_2 &= (e,7) \\ Q &= (1,2) \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} P_1 &= (9,0) \\ P_2 &= (0,1) \\ Q &= (18,-1) \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} P_1 &= (-3,-4) \\ P_2 &= (2,2) \\ Q &= (6,6) \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} P_1 &= (-3.6, -1.8) \\ P_2 &= (7, 3.5) \\ Q &= (\pi, \pi/2) \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} P_1 &= (-2, -1) \\ P_2 &= (-3, -2) \\ Q &= (2.6, 1.4) \end{aligned}$$

Aufgabe 9:

Untersuchen Sie folgende Funktionen auf kritische Stellen, und charakterisieren Sie diese, falls zutreffend, als lokale Maxima und Minima. Es gilt, wenn nicht anders angegeben, jeweils $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vergessen Sie nicht, neben der notwendigen auch die hinreichende Bedingung zu prüfen!

a)

$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 9$$

b)

$$f(x) = 2x^2 - 3x - 7$$

c)

$$f(x) = x^5 + x$$

d)

$$f(x) = x^3 - x$$

e)

$$f(x) = x + \sin(x)$$

f)

$$f(x) = e^x - 4x$$

g)

$$f(x) = e^{\sin(x)}$$

h)

$$f(x) = \ln(1 + x^2)$$

i)

$$f(x) = x^3 - 5x^2$$

j)

$$f(x) = e^{-x^2}$$

k)

$$f(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$$

l)

$$f(x) = (1-x)e^{-x^2}$$

m)

$$f(x) = (x+1)e^{x^2}$$

Aufgabe 10:
Bestimmen Sie die folgenden Integrale:

a)

$$\int_{1}^{-2} x^2 + 2 \; dx$$

b)

$$\int_{0}^{3} \sqrt{2x+3} \; dx$$

c)

$$\int_{0}^{\pi/3} \sin(2x - \pi) \; dx$$

d)

$$\int_{0}^{1} \frac{3}{\sqrt{4x+1}} \; dx$$

e)

$$\int_{0}^{1} 2x \cdot e^{x^2-1} \; dx$$

f)

$$\int_{1}^{4} \frac{e^{\sqrt{x}}}{2 \cdot \sqrt{x}} \; dx$$

g)

$$\int_{0}^{2} \frac{2x}{x^2+1} \; dx$$

Aufgabe 11:
Bestimmen Sie in den folgenden Fällen alle Lösungen $k \in \mathbb{R}$ der gegebenen Gleichung.

a)

$$\int_{-k}^{k} 1 - x^2 \; dx = 0$$

b)

$$\int_{-k}^{k} x^3 - x \; dx = 0$$

Aufgabe 12:
Bestimmen Sie in den folgenden Fällen die Taylorreihe der Funktion f im Entwicklungspunkt x_0:

a)

$$f(x) = \cos(x),\;\; x_0 = \pi/4$$

b)

$$f(x) = \ln(1+x),\;\; x_0 = 0$$

Hinweis: Hier bezeichnet ln *den natürlichen Logarithmus.*

c)

$$f(x) = \frac{1}{1+x},\;\; x_0 = 1$$

Aufgabe 13:
Beantworten Sie, ohne eine Begründung anzugeben, die folgenden Fragen mit "Ja" oder "Nein".

a) Ist die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 1,\;\; x \geq 0 \\ -1,\;\; x < 0 \end{cases}$$

auf ihrem Definitionsbereich stetig?

b) Existiert der Grenzwert

$$\lim_{\overrightarrow{x \to 0}} e^{-1/x^2} \sin(1/x) \;?$$

c) Ist die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 2x-1,\;\; x \leq 1 \\ x^2,\;\; x > 1 \end{cases}$$

auf ihrem Definitionsbereich stetig?

d) Ist die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} e^x,\;\; x \geq 0 \\ -x+2,\;\; x < 0 \end{cases}$$

auf ihrem Definitionsbereich stetig?

e) Ist die Funktion $f(x) = |x|$ in $x = 0$ differenzierbar?