· Konvergenz von exp(x)

· Erinnerung: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, mit $0! := 1$

· Tatsache: Falls $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n < \infty$

Mit $a_n = \frac{1}{n!}$: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

folgt, dass $\forall x : e^x < \infty$

$\Rightarrow$ e^x ist wohldefiniert

· Ableitungen und Ableitungsregeln

· $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktion

<u>Def.</u>: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt in x differenzierbar, falls

$$f'(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$ existiert.

(insb. $\lim_{h\uparrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\downarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$)

f heißt differenzierbar, falls f in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist.

· <u>Bemerkung</u> f diff.bar $\Rightarrow$ f stetig

$\rightsquigarrow$ f nicht stetig $\Rightarrow$ f nicht diff.bar

Beispiel:

$f(x) = |x|$ ist in $x=0$ nicht diff.bar:

$$\lim_{h \nearrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -1 \quad , \quad \lim_{h \searrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = +1$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \text{ ex. nicht!}$$

Regeln für Ableitungen

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar,

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ diff.bar, $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig.

1) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

2) $(af)'(x) = a f'(x)$

3) $(a f + b g)'(x) = a f'(x) + b g'(x)$

4) $(f \cdot g)'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$ (Produktregel)

5) $\left(\frac{f}{h}\right)'(x) = \frac{f'(x) h(x) - f(x) h'(x)}{h(x)^2}$ (Quotientenregel)

6) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ (Kettenregel)

Einige bekannte Ableitungen:

$\left(f'(x) \equiv \frac{d}{dx} f(x) \right)$

- $\forall c \in \mathbb{R}: \frac{d}{dx}(c) = 0$
- $\forall n \in \mathbb{N}: \frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1}$

$\Rightarrow$ · $\forall n \in \mathbb{N}, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}: \quad \frac{d}{dx}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n)$

$$= a_1 + 2 a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}$$

- $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$
- $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x), \quad \frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$
- Für $x > 0$, $\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$
- Für $x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$: $\frac{d}{dx} \frac{1}{x^n} = \frac{d}{dx} x^{-n} = -n x^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}$
- Für $x > 0$, $\frac{d}{dx} \sqrt{x} = \frac{d}{dx} x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,
- Für $x > 0$: $\frac{d}{dx} \sqrt[n]{x} = \frac{d}{dx} x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n} x^{-\frac{n-1}{n}} = \frac{1}{n\, x^{\frac{n-1}{n}}}$
- Für $x \in (-1,1)$: $\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\frac{d}{dx} \arccos(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Für $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{d}{dx} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$
- $\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$
- Für $b > 0$, $\frac{d}{dx} b^x = \frac{d}{dx} e^{\ln(b) x} = \ln(b)\, b^x$

BRUNNEN

Ableitungen in physikalischen Zusammenhängen

· Beispiel: Der von einem Auto zurückgelegte Weg betrage $w(t) = a \cdot t$, $a \in \mathbb{R}$.

=> Die Geschwindigkeit beträgt

$w'(t) = a$ ← konstant

· Beispiel: Der von einer Kugel im freien Fall zurückgelegte Weg betrage

$s(t) = \frac{g}{2} t^2$

=> Die Geschwindigkeit zur Zeit t beträgt

$s'(t) = g\,t$,

Die Beschleunigung zur Zeit t beträgt

$s''(t) = g$ ← konstant, Erdgravitationskonstante

Beispiel: Die Stoffmenge eines radioaktiven Isotops sei gegeben durch

$n(t) = n_0 \cdot e^{-\lambda t}$

=> Die Zerfallsrate zur Zeit t beträgt

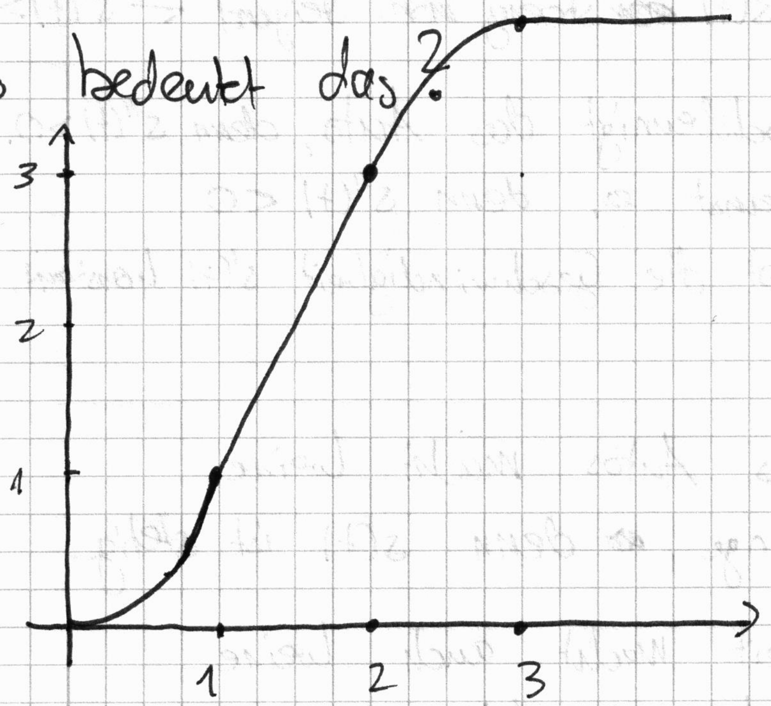
$n'(t) = -\lambda\, n_0 e^{-\lambda t} = -\lambda\, n(t)$ ← proportional zu $n(t)$!

Beispiele von Ableitungen.

Sei $s(t)$ der Weg, den ein Auto zur Zeit t zurückgelegt hat. Angenommen,

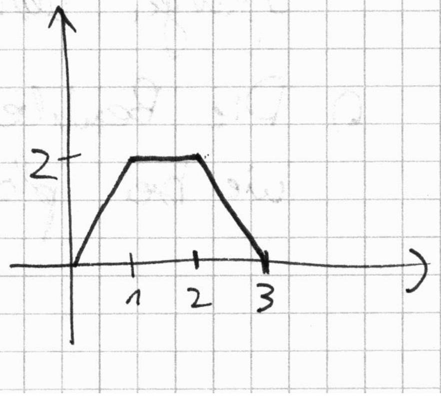
$$s(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t^2, & t \in [0,1) \\ 2t-1, & t \in [1,2) \\ -(t-3)^2+4, & t \in [2,3) \\ 4, & t \geq 3 \end{cases}$$

Was bedeutet das?

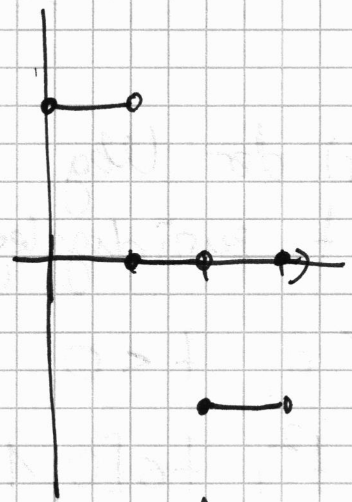


Wir stellen fest:

$$s'(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2t, & t \in [0,1) \\ 2, & t \in [1,2) \\ -2(t-3), & t \in [2,3) \\ 0, & t \geq 3 \end{cases}$$



$$s''(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2, & t \in [0,1) \\ 0, & t \in [1,2) \\ -2, & t \in [2,3) \\ 0, & t \geq 3 \end{cases}$$



$\Rightarrow$ Wir können folgende Dinge feststellen:

1) Vor Zeit 0 und nach Zeit 3 steht das Auto still, denn $s(t)$ konstant $\leftrightarrow s'(t) = 0$

2) Zwischen $t=0$ und $t=3$ bewegt es sich vorwärts, denn $s(t)$ streng mon. steigend $\leftrightarrow s'(t) > 0$

3) Bei $t \in [0,1)$ beschleunigt das Auto, denn $s''(t) > 0$.
Bei $t \in [2,3)$ bremst es, denn $s''(t) < 0$
Für $t \in [1,2)$ bleibt die Geschwindigkeit $s'(t)$ konstant, denn $s''(t) = 0$

4) Die Position des Autos macht keine plötzlichen Sprünge, denn $s(t)$ ist stetig.

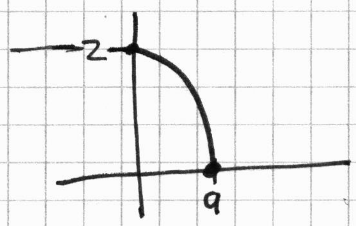
5) Die Geschwindigkeit macht auch keine Sprünge, denn $s'(t)$ ist stetig

6) Die Beschleunigung $s''(t)$ macht Sprünge, wie bei plötzlichem Beschleunigen / Abbremsen.

Beispiel: (Eine Kugel im freien Fall)

Eine Kugel werde aus der Höhe 2m auf den Boden fallen gelassen. Dann ist ihre Höhenposition in Abhängigkeit von der Zeit gegeben als

$$h(t) = \begin{cases} 2 - \frac{1}{2} g t^2, & t \in [0,a] \\ 2, & t < 0 \\ 0, & t > a \end{cases}, \text{ wobei } g \text{ eine Konstante ist}$$



Wir können a finden via

$$h(a) = 0$$

$$\overset{\shortparallel}{2 - \tfrac{1}{2} g a^2} \Rightarrow a^2 = \frac{4}{g} \Rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{g}}$$

suchen positive Lösung

$$h'(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ -gt, & t \in [0,a) \\ 0, & t \geq a \end{cases}, \quad h''(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ -g, & t \in [0,a) \\ 0, & t \geq a \end{cases} \quad ?$$

$\Rightarrow$ „$h'(t)$" ist in $t = a$ nicht stetig! Daher existiert „$h''(a)$" nicht.

- Sprung von „$h'(t)$" in a passiert, wenn die Kugel „plötzlich" auf dem Boden ankommt.