Prof. Dr. D. Huybrechts
I. Grosse-Brauckmann

Wintersemester 2017/18

S2A1 HAUPTSEMINAR ALGEBRA: ALGEBRAISCHE ZAHLENTHEORIE

Vorbesprechung am Dienstag, den 25.7. um 14 Uhr c.t. im Raum N0.003

Zeit und Ort: Dienstag 16-18 im Raum 0.006

Kontakt: igb@math.uni-bonn.de

In diesem Seminar wollen wir die Grundlagen der algebraischen Zahlentheorie erarbeiten. Das heißt, dass wir algebraische Zahlkörper K (also endliche Erweiterungen von $\mathbb{Q}$) und den ganzen Abschluss $\mathcal{O}_K \subset K$ von $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ studieren werden. Resultate sind hier unter anderem die Primidealzerlegung in Dedekindringen, die Endlichkeit der Klassengruppe, der Dirichletsche Einheitensatz sowie der folgende Spezialfall des berühmten letzten Satzes von Fermat:

Theorem 0.1. *Sei $p \neq 2$ eine Primzahl, so dass p die Klassezahl des Körpers $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ nicht teilt, wobei ζ_p eine primitive p-te Einheitswurzel ist. Dann hat die Gleichung*

$$x^p + y^p = z^p$$

keine ganzzahligen, zu p teilerfremden Lösungen.

Das Seminar folgt dem Buch [3]. Die Inhalte der einzelnen Vorträge sind aber auch in den darüber hinaus angegebenen Quellen, etwa [2], zu finden.

Vorausgesetzt werden Grundbegriffe der Algebra inklusive des Begriffs einer ganzen Ringerweiterung und Grundlagen der Galoistheorie. Die Teilnehmer werden gebeten, [3, I.1] über die Gaußschen Zahlen selbstständig zu lesen.

1. **Ganzheit** [3, I.2 nach Korollar 2.7 + Aufgabe 4] **(10.10.17)**
   kurze Wiederholung der Begriffe Ganzheit, ganzer Abschluss, Norm und Spur. Begriff der Diskriminante und der Ganzheitbasis.
2. **Ideale** [3, I.3] **(17.10.17)**
   Begriff des Dedekindrings. Primidealzerlegung in Dedekindringen. Chinesischer Restsatz. Definition der Klassengruppe.
3. **Gitter** [3, I.4] **(24.10.17)**
   Begriff des Gitters. Minkowskischer Gitterpunktsatz (auch unter Voraussetzung der schwachen Ungleichung wie in [5, Satz 5.7]). Neuer Beweis des Zwei-Quadrate-Satzes für Primzahlen([5, zweiter Beweis von Satz 6.2]). Approximation (irrationaler) reeller Zahlen ([1, Corollaries 6.2.3-5]). Wenn noch Zeit bleibt auch den Vier-Quadrate-Satz für Primzahlen ([5, zweiter Beweis von Satz 6.6]).
4. **Minkowski Theorie** [3, I.5] **(7.11.17)**
   Definition des Minkowskiraums. Weitere Anwendung des Gitterpunktsatzes.
5. **Die Klassenzahl** [3, I.6] **(14.11.17)**
   Endlichkeit der Klassengruppe (siehe auch [6, Theorem 9]). Bijektion zwischen der Klassengruppe und binär quadratischen Formen ([6, 3.10 vor Lemma 29] bzw. [2, Thm 4.29]).
6. **Der Dirichletsche Einheitensatz** [3, I.7 ohne Satz 7.5 + Aufgabe 1 (Pellsche Gleichung, vgl. [5, 10]), evtl. auch Aufgaben 2 und 3] **(21.11.17)**

7. **Erweiterungen von Dedekindringen** [3, I.8] **(28.11.17)**
   Gaußsches Reziprozitätsgesetz.
8. **Hilbertsche Verzweigungstheorie** [3, I.9] **(5.12.17)**
9. **Kreisteilungskörper I** [3, I.10] **(12.12.17)**
10. **Kreisteilungskörper II** [7, 1 ohne 1.2-4] **(19.12.17)**
    Beweis von Satz 0.1.
11. **Die p-adischen Zahlen** [3, II.1] **(9.1.18)**
12. **Der p-adische Absolutbetrag** [3, II.2] **(16.1.18)**
13. **Bewertungen** [3, II.3] **(23.1.18)**
14. **Komplettierungen** [3, II.4] **(30.1.18)**
    Hensels Lemma

Literatur

[1] J.-H. Evertse: Notes on Diophantine Approximation. http://www.math.leidenuniv.nl/~evertse/Minkowski.pdf
[2] J.S. Milne: Algebraic Number Theory. http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/ANT.pdf
[3] J. Neukirch: *Algebraische Zahlentheorie*. Springer (1992).
[4] N. Oswald: Geometrie der Zahlen. https://arxiv.org/pdf/1605.04146.pdf
[5] M. Stoll: Diophantische Gleichungen. http://www.mathe2.uni-bayreuth.de/stoll/teaching/Dioph/Skript.pdf
[6] H.P.F. Swinnerton Dyer: *A brief guide to Algebraic Number Theory*. Cambridge University Press (2001).
[7] L. Washington: *Introduction to Cyclotomic Fields*. Graduate Text in Mathematics **83**. Springer (1997).