

# HAUPTSEMINAR ALGEBRA (S2A1) WS 2026/27

## KOMMUTATIVE ALGEBRA

PROF. DR. DANIEL HUYBRECHTS & MORITZ HARTLIEB

Ziel dieses Seminars ist es, das Buch *Introduction to Commutative Algebra* von Atiyah und Macdonald in Form von Einzelvorträgen durchzuarbeiten.<sup>1</sup> Für eine heuristische Diskussion der geometrischen Anschauung ist ein Blick in die Bücher *Undergraduate Commutative Algebra* von Reid und *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry* von Eisenbud empfehlenswert.

Das Seminar eignet sich als Parallelveranstaltung zu den Vorlesungen *Algebraische Geometrie 1* von Herrn Mezzedimi und *Einführung in die Algebra (Galois-Theorie)* von Prof. Huybrechts sowie zur Vorbereitung auf die Vorlesungsreihe zur *Algebraischen Geometrie* im nächsten Jahr.

Anmeldungen für das Seminar werden ab sofort und bis Ende August per E-Mail an [hartlieb@math.uni-bonn.de](mailto:hartlieb@math.uni-bonn.de) entgegengenommen (mit der Angabe Ihrer Präferenzen für zwei Themen). Das folgende Seminarprogramm ist vorläufig und kann sich noch ändern.

Start: 19.10.2026, Zeit: Montag 14:15 - 16:00 SR N 0.003

### 1. MODULN UND TENSORPRODUKTE (1-2 TERMINE)

(Siehe [1, Kapitel 2]) Exakte Sequenzen von Moduln, Linksexaktheit des Hom-Funktors. Ist Hom rechtsexakt? Das Jacobson-Radikal eines Rings. Endlich erzeugte Moduln und das Lemma von Nakayama. Existenz und universelle Eigenschaft des Tensorprodukts. Kanonische Isomorphismen. Beispiele für Tensorprodukte. Rechtsexaktheit des Tensorprodukts.

$$(A/I) \otimes_A M \cong M/IM.$$

### 2. LOKALISIERUNG

(Siehe [1, Kapitel 3]) Konstruktion und universelle Eigenschaft der Lokalisierung eines Rings an einer multiplikativ abgeschlossenen Menge. Beispiele. Konstruktion der Lokalisierung von Moduln. Exaktheit der Lokalisierung.

$$S^{-1}M \cong (S^{-1}A) \otimes_A M.$$

Lokale Eigenschaften. Ideale von  $S^{-1}A$ . Primideale von  $S^{-1}A$ .

### 3. GANZE ABHÄNGIGKEIT (1-2 TERMINE)

(Siehe [1, Kapitel 5]) Definition und Charakterisierungen der ganzen Abhängigkeit. Ganzer Abschluss. Transitivität der ganzen Abhängigkeit. Der ganze Abschluss von  $A$  in  $B$  ist ganz abgeschlossen in  $B$ . Ganz abgeschlossene Ringe; faktorielle Ringe sind ganz abgeschlossen. Ganze Erweiterungen, Quotienten und Lokalisierungen. Erster und zweiter Satz von Cohen–Seidenberg. Ganzer Abschluss und Lokalisierung

---

<sup>1</sup>Dabei folgen wir dem Programm des Seminars von Rapoport und Schlickewei [4].

kommutieren. Ganz abgeschlossen zu sein ist eine lokale Eigenschaft. Ist  $A$  ein noetherscher, ganz abgeschlossener Integritätsring und  $L$  eine endliche separable Erweiterung seines Quotientenkörpers, so ist der ganze Abschluss von  $A$  in  $L$  als  $A$ -Modul endlich erzeugt.

#### 4. DER HILBERTSCHE NULLSTELLENSATZ

(Siehe [2, Kapitel 4.5]) Jacobson-Ringe und der Rabinowitsch-Trick. Die allgemeine Form des Nullstellensatzes. Der klassische Nullstellensatz. Das Radikal eines Ideals in einer Polynomalgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Folgerungen aus dem Nullstellensatz.

#### 5. INDUKTIVE LIMITES UND FLACHE MODULN

(Siehe [1, Kapitel 2, Übungsaufgaben 14–26]) Konstruktion und universelle Eigenschaft des induktiven Limes eines induktiven Systems von Moduln. Beispiele. Homomorphismen induktiver Systeme und Exaktheit gerichteter induktiver Limites. Induktive Limites vertauschen mit Tensorprodukten. Gegenbeispiele zur Linksexaktheit des Tensorprodukts, flache Moduln. Flachheit ist eine lokale Eigenschaft.

#### 6. PRIMÄRZERLEGUNG

(Siehe [1, Kapitel 4] und [5, Kapitel 7]) Beispiel: Der Integritätsbereich  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  ist nicht faktoriell. Primäre und assoziierte Ideale. Existenz und Eindeutigkeit der Primärzerlegung.

#### 7. KETTENBEDINGUNGEN

(Siehe [1, Kapitel 6]) Aufsteigende und absteigende Kettenbedingungen. Äquivalente Formulierungen mithilfe der Maximal- bzw. Minimalbedingung. Noethersche und artinsche Moduln. Beispiele. Ein Modul ist genau dann noethersch, wenn alle Untermoduln endlich erzeugt sind. Kettenbedingungen und kurze exakte Sequenzen, Folgerungen. Länge eines Moduls. Moduln endlicher Länge.

#### 8. NOETHERSCHE UND ARTINSCHER RINGE

(Siehe [1, Kapitel 7 und 8]) Lokalisierungen noetherscher bzw. artinscher Ringe sind noethersch bzw. artinsch. Hilberts Basissatz mit Folgerungen. In artinschen Ringen sind Primideale maximal, und es gibt nur endlich viele. Das Nilradikal artinscher Ringe ist nilpotent. Artinsche Ringe sind noethersch (siehe [3, Theorem 3.2]).

#### 9. DEDEKINDRINGE UND DISKRETE BEWERTUNGSRINGE

(Siehe [1, Kapitel 5 und 9]) Bewertungsringe. Bewertungsringe sind lokale, ganz abgeschlossene Integritätsringe. Diskrete Bewertungsringe. Beispiele. Diskrete Bewertungsringe sind noethersch. Verschiedene Charakterisierungen diskreter Bewertungsringe. Die globalen Versionen diskreter Bewertungsringe sind Dedekindringe. Jedes von Null verschiedene Ideal in einem Dedekindring lässt sich auf eindeutige Weise als Produkt von Null verschiedener Primideale schreiben (ohne Beweis). Beispiele für Dedekindringe.

## 10. DAS LEMMA VON ARTIN–REES UND VERVOLLSTÄNDIGUNGEN

(Siehe [1, Kapitel 10]) Vervollständigungen. Beispiele. Graduierte Ringe. Das Lemma von Artin–Rees und Folgerungen. Eigenschaften der kanonischen Abbildung

$$\widehat{A} \otimes_A M \longrightarrow \widehat{M}.$$

Krullscher Durchschnittssatz und Folgerungen. Die Vervollständigung eines noetherschen Rings ist noethersch.

## 11. DIMENSIONSTHEORIE (1-2 TERMINE)

(Siehe [1, Kapitel 11]) Hilbertfunktionen und -polynome. Dimensionstheorie noetherscher lokaler Ringe: Für noethersche lokale Ringe stimmen die verschiedenen Dimensionsbegriffe überein. Der Krullsche Hauptidealsatz. Reguläre lokale Ringe. Vervollständigung regulärer lokaler Ringe. Transzendenzgrad.

## LITERATUR

- [1] M. Atiyah und I. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, 1969.
- [2] D. Eisenbud, *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, GTM, vol. 150, Springer, 1995.
- [3] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press, 1989.
- [4] M. Rapoport und U. Schlickewei, *Seminar zur Kommutativen Algebra*, Universität Bonn, 2007, [https://www2.math.uni-bonn.de/ag/alggeom/veranstaltungen/Seminare/2007ss\\_semkommAlg.pdf](https://www2.math.uni-bonn.de/ag/alggeom/veranstaltungen/Seminare/2007ss_semkommAlg.pdf)
- [5] M. Reid, *Undergraduate Commutative Algebra*, Cambridge University Press, 1995.