SEMINAR: ALGEBRAISCHE GEOMETRIE, WS 2020/21, (S2A1)

D. HUYBRECHTS

Ziel des Seminars ist es, sich mit grundlegenden Begriffen, Beispielen und Konstruktionen der algebraischen Geometrie vertraut zu machen. Die moderne algebraische Geometrie in ihrer schematheoretischen Sprache wird Gegenstand der parallel stattfindenden Vorlesung 'Algebraic Geometry I' sein. Die geometrische Intuition, die im Seminar entwickelt werden soll, wird für das Verständnis der abstrakten Begriffe (Garbe, Schemata, Kohomologie etc.) hilfreich sein. Wir werden möglichst viele direkt zugängliche Konstruktionsmethoden studieren und uns so einen Fundus an Beispielen und Techniken erarbeiten. Die Konstruktion interessanter Varietäten ist ein zentrales Problem der algebraischen Geometrie und die wichtigsten offenen Vermutungen haben mit diesem Problem zu tun (trotz der trügerischen Vielfalt der hier zu besprechenden Beispiele).

Organisation. Der genaue Ablauf hängt von der Zahl der Anmeldungen ab und von der Situation im WS. Informationen hierzu gibt es im September. Von jedem Teilnehmer wird eine intensive Beschäftigung mit den Themen des Seminars erwartet und nicht mit denen des eigenen Vortrags. Denkbar ist, dass einzelne Themenkomplexe von kleineren Gruppen erarbeitet und dann gemeinsam vorgetragen werden. Jeder Vortrag sollte mindestens zwei Übungsaufgaben enthalten, für die zum nächsten Termin auch Musterlösungen bereitgestellt werden. (Eine schriftliche Ausarbeitung der Vorträge wird hingegen nicht erwartet.)

Anmeldung per email an huybrech@ bis zum 30.9. Eine Vorbesprechung wird nicht stattfinden.

Vorbereitung der Voträge. Die folgende Beschreibung der einzelnen Vorträge ist so detailliert, dass eine weitgehend eigenständige Vorbereitung möglich sein sollte. Spätestens zwei Wochen vor dem eigentlichen Vortrag werden wir das Grundkonzept Ihres Vortrages und offene Fragen zu diskutieren.

1. Affine und projektive Varietäten

Wir studieren Nullstellengebilde von Polynomen. Dies kann im affinen Raum $\mathbb{A}^n$ oder projektiven Raum $\mathbb{P}^n$ geschehen. Dieser Vortrag führt diese Räume und den Begriff einer (affinen oder projektiven) Varietät ein. Die bereits sehr interessanten Beispiele rationaler Kurven in Gestalt der getwisteten Raumkurve oder der rationalen Normkurve werden aus verschiedenen Gesichtspunkten diskutiert.

Der Grundkörper ist immer algebraisch abgeschlossen. Im Fall ausgeprägten Unbehagens bzgl. positiver Charakteristik, kann man gerne dabei an den Körper $\mathbb{C}$ denken.

Grundlage für diesen Vortrag ist [2, Lecture 1], welches komplett durchgearbeitet werden soll bis auf 1.8.,1.9, 1.29, 1.30. Allerdings kann bzw. soll nicht alles davon vorgetragen werden, s.u..

(i) Definition von $\mathbb{A}^n$ und $\mathbb{P}^n$. Affine und projektive Varietäten, insbesondere Nullstellenmengen homogener Polynome. Homogenisierung von Polynomen. Man handle hier schon den Fall von Hyperflächen ab (1.7).

(ii) Lineare Unterräume. Dimensionsformel für den Durchschnitt linearer Räume.

(iii) Endliche Mengen sind interessanter als man denkt, allerdings werden wir diesen Teil kurz halten. Man definiere 'Punkte in allgemeiner Lage', bearbeite 1.6 und behandle das Doppelverhältnis (cross ratio). Theorem 1.4 gebe man nur an.

(iv) Getwistete Kubik (1.10) und rationale Normkurven (1.14). Exercise 1.11 und 1.13 sollten nicht im Vortrag behandelt werden. 1.16. kann man eventuell ebenfalls weglassen. Theorem 1.18 sollte formuliert und bewiesen werden (dazu 1.17). Hingegen sollten 1.19-1.25 nicht in diesem Vortrag diskutiert werden.

(v) Singuläre rationale Kurven. 1.26-1.28

Einige der im Buch formulierten Exercises bieten sich als Übungsaufgaben an. Auch könnte man den 'cross ratio' zu einer solchen verarbeiten.

2. Zariski Topologie und reguläre Funktionen

Grundlage für diesen Vortrag ist [2, Lecture 2]. Nach dem Varietäten eingeführt wurden, werden nun Abbildungen zwischen diesen studiert. Die Veronese und Segre Abbildungen sind von grundlegender Bedeutung.

(i) Man definiere und diskutiere die Zariski Topologie auf affinen und projektiven Varietäten.

(ii) Affiner und homogener Koordinatenring. Insbesondere muss $I(X)$ für $X \subset \mathbb{A}^n$ bzw. $X \subset \mathbb{P}^n$ eingeführt werden. An dieser Stelle soll bereits auch $V(I)$ für ein (homogenes) Ideal $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ eingeführt werden (vgl. [2, Lecture 5]). Wiederholen Sie den Nullstellensatz aus der Kommutativen Algebra und formulieren Sie im vorliegenden Kontext.

(iii) Was ist eine reguläre Funktion? Lemma 2.1 wird nur formuliert. Exercise 2.2.

(iv) Weisen Sie nach, dass der Ring der Keime (germ) regulärer Funktionen ein lokaler Ring ist.

(v) Reguläre Abbildungen zwischen Varietäten. Diskussion des Beispiels S.22/23.

(vi) Veronese Abbildung $\mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N$. Definition und Beispiele: rationale Normkurve und die Veronese Fläche. (Example 2.6 ist eine gute Übung, Exercise 2.5 ist zu elementar.) Warum definiert die Veronese Abbildung einen Isomorphismus mit dem Bild? Vgl. Exercise 2.8, Exercise 2.9 (für die wirkliche Beschreibung von Varietäten ist die als Durchschnitt von Quadriken i.a. allerdings ungeeignet). Man vergleiche die Vorgehensweise in [2] mit der in [3, Exerc. I.2.12,2.13] und in [6, Sect. 5.1]. Man erwähne die koordinatenfreie Beschreibung der Veronese Abbildung auf Seite 25.

3. Segre Abbildung

Diese Vortrag ist als direkte Fortsetzung des vorangegangenen zu verstehen. Es lohnt sich, grundlegende Beispiele im Detail zu behandeln. Darüberhinaus wird der Graph einer regulären Abbildung und das Faserprodukt diskutiert. Grundlage ist [2, Lecture 2].

(i) Segre Abbildung $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$. Das Bild ist wieder eine Varietät und damit wird $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ selbst zu einer projektiven Varietät. Diskussion des Beispiels $\Sigma_{1,1}$ (Seite 26). Man erwähne die Segre Abbildung in der koordinatenfreien Version auf Seite 31. Vergleiche das Vorgehen mit dem in [3, Exerc. I.2.14,2.15] und in [6, Sect. 5.3]..

(ii) Bihomogene Polynome. Beispiel: Getwistete Kubik (Exercise 2.13., Exercise 2.17 und Text davor).

(iii) Produkt von Varietäten und kategorielle Eigenschaft (Example 2.21). Wichtig ist, dass das Produkt nicht(!) die Produkttopologie trägt (Exercise 2.22). Faserprodukt (Example 2.25, Exercise 2.26). Man zeige, dass die Diagonale eine abgeschlossene Untervarietät ist (Exercise 2.15). Vgl. auch [1, Ch. 6].

(iv) Man definiere den Graphen einer regulären Abbildung als Varietät.

4. Projektionen und Kegel

Grundlage für diesen Vortrag ist [2, Lecture 3].

(i) Man definieren die Projektion von einem Punkt (Example 3.4) und beweise Theorem 3.5. Hierzu muss man kurz(!) etwas über die Resultante von zwei Polynomen sagen, die leider in der Galois-Theorie Vorlesung nicht besprochen wurde. Exercise 3.8 könnte an dieser Stelle interessant sein.

(ii) Das Bild einer projektiven Varietät unter einer regulären Abbildung ist wieder eine projektive Varietät (Theorem 3.13). Dazu betrachtet man zuerst die Spezialfälle auf Seite 38 und beweist dann Theorem 3.12.

(iii) Der Kegel über einer Varietät X: Example 3.1 (der Fall, dass X in einer Hyperebene enthalten ist) und Example 3.10 (der allgemeine Fall und Interpretation mit Hilfe der Projektion von der Spitze).

(iv) Man vergleiche [3, Exerc. I.2.10].

5. Quadriken und Grassmannsche

Grundlage für diesen Vortrag sind [2, Lectures 1,3,6].

(i) Man wiederhole die Beziehung zwischen Bilinearformen und quadratischen Formen ($\mathrm{char}(K) \neq 2$ und K algebraisch abgeschlossen) (Example 3.3) und definieren Quadriken in $\mathbb{P}^n$. Einfachstes Beispiel: Quadriken in $\mathbb{P}^1$.

(ii) Quadriken in $\mathbb{P}^2$ und rationale Normkurven vom Grad 2 (Example 1.20). Neuer Beweis für Theorem 1.18 (siehe auch [6, Sect. 5.2]). Das Bild auf Seite 34 für Quadriken in $\mathbb{P}^3$ ist für das Verständnis hilfreich.

(iii) Definition von $G(k,n)$ als Varietät und erkläre $G(k,n) = \mathbb{G}(k-1,n-1)$. Spezialfall: $G(1,n) = \mathbb{P}^{n-1}$. Example 6.6.

(iv) Plücker Gleichungen (siehe auch [6, Sect. 5.4]). Spezialfälle $G(2,V) \subset \mathbb{P}(\wedge^2 V)$ und die Quadrik $G(2,4) \subset \mathbb{P}(\wedge^2 K^4) = \mathbb{P}^5$. Example 6.2.

6. Inzidenzvarietäten

Ausgehend von Grassmannschen Varietäten kann man weitere Varietäten konstruieren.Wir stützen uns auf [2, Lect. 6].

(i) Wir beginnen erneut mit Grassmannschen und betrachten natürliche Untervarietäten. Die Schubertvarietät $\Sigma_\ell \subset \mathbb{G}(k,n)$ ist die Menge der linearen Unterräume $\Lambda \subset \mathbb{P}^n$ mit $\Lambda \cap \mathbb{P}^m$ von der Dimension $\geq \ell$. Man zeige, dass dies wirklich Untervarietäten sind (vgl. [2, S. 66]).

(ii) Man definierte die Inzidenzvarietät $\Sigma \subset \mathbb{G}(k,n) \times \mathbb{P}^n$ als projektive Varietät, [2, Example 6.12].

(iii) Für $X \subset \mathbb{P}^n$ hat die Menge $\mathcal{C}_k(X) \subset \mathbb{G}(k,n)$ aller $\Lambda \subset \mathbb{P}^n$ mit $X \cap \Lambda \neq \emptyset$ die Struktur einer projektiven Varietät.

(iv) Fanovarietäten von Geraden $\ell \subset X \subset \mathbb{P}^n$ (oder allgemeiner von linearen Unterräumen $\Lambda \subset X$) werden benutzt um ausgehend von einer 'interessanten' Varietät X neue (noch interessantere) Varietäten $F_k(X)$ zu konstruieren. Example 6.19 in [2].

(v) Man diskutiere den 'Join' $J(X,Y)$ zweier disjunkter Varietäten $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ als Vereinigung aller Geraden, die Punkte in X und Y verbinden. Dies ist wiederum eine projektive Varietät. Dazu muss man insbesondere Prop. 6.13 beweisen. So die Zeit erlaubt, kann man auch den Fall sich schneidender Varietäten behandeln, vgl. [2, Ex. 8.1,8.2].

7. Algebraische Gruppen, Beispiele

Grundlage für diesen Vortrag ist [2, Lect. 10].

(i) $\mathrm{GL}(n)$ als affine Varietät: Als offene Menge von $\mathbb{A}^{n^2}$ (Komplement der Hyperfläche $\det = 0$) oder als abgeschlossene Menge von $\mathbb{A}^{n^2+1}$ (definiert durch die Gleichung $\det \cdot x_{n^2+1} = 1$). Die Multiplikation is regulär. Example 10.1. Analog dazu behandle man die Gruppen $\mathrm{SL}(n)$ und $\mathrm{PGL}(n)$. Man gebe die formale Definition einer algebraischen Gruppe wie auf Seite 114.

(ii) Eine algebraische Gruppe G 'wirkt' auf einer Varietät X durch einen regulären Morphismus $G \times X \longrightarrow X$ (siehe S. 116). Beispiele: Examples 10.4, 10.5, 10.6.

(iii) Die Wirkung von $\mathrm{PGL}(2)$ auf $\mathbb{P}^2$ und $\mathbb{P}^3$: Examples 10.8 und 10.9.

(iv) Die Wirkung von $\mathrm{PGL}(2)$ auf $\mathbb{P}^4$ und die j-Invariante (Example 10.12). Stellen Sie die Verbindung zur Vorlesung Algebra I her. Man erwähne kurz die Wirkung von $\mathrm{PGL}(2)$ auf dem Raum der Kubiken $\mathbb{P}^9$ und das erneute Auftreten der j-Invariante.

(v) Man erkläre die Wirkung von $\mathrm{PGL}(n)$ auf dem (projektiven) Raum der Polynome von einem festen Grad d in n Variablen.

(vi) Quotienten endlicher Gruppenwirkungen auf affinen Varietäten: Seite 124-126.

8. Tangentialraum und Gauss Abbildung

Wir werden den Tangentialraum einer affinen/projektiven Varietät an einen Punkt definieren. Wiederholen bzw. führen Sie die relevanten Begriffe aus der kommutativen Algebra ein: Dimension und Regulärität lokaler Ringe.

(i) Man definieren den Tangentialraum als Kern des Differentials, vgl. S. 174 [2]. Man berechne einige einfache Beispiele, z.B. für die Kurve in $\mathbb{A}^2$ definiert durch $x^3 = y^2$.

(ii) Der projektive Tangentialraum, S. 181 bis Exercise 14.12 [2]. Wir sagen, dass eine Hyperfläche in $X \subset \mathbb{P}^n$ gegeben als Nullstellenmenge eines homogenen Polynoms $f \in K[x_0, \ldots, x_n]$ glatt in $P \in X$ ist, falls nicht alle Ableitungen $\partial f / \partial x_i$ in P verschwinden.

(iii) Man definiere die Gauß Abbildung $X \longrightarrow \mathbb{G}(k,n)$. Dabei nehmen wir an, dass alle Tangentialräume von der gleichen Dimension k sind (X is glatt), [2, Example 5.2]. Vgl. auch [6, Sect. 6.5] und insbesondere [6, Exercise 6.5.3].

(iv) Die Gauß Abbildung für Hyperflächen vom Grad ≥ 2 ist endlich. Insbesondere ist das (Gauss) Bild wieder eine Hyperfläche.

(v) Man beschreibe den Tangentialraum von $G(k,n)$ in $\Lambda \subset V$ as $\mathrm{Hom}(\Lambda, V/\Lambda)$, [2, Example 16.1].

(vi) Analog beschreibe man den Tangentialraum an die Inzidenzvarietät (Example 16.2) und die Fahnenmannigfaltigkeit (Exericse 16.3, Example 11.40).

9. Ebene kubische Kurven

Für diesen Vortrag stützen wir uns auf [4, Ch. 4]. Ziel ist es, Hyperflächen in $\mathbb{P}^2$ (also Kurven) gegeben durch homogene Polynome $f \in K[x_0, x_1, x_2]$ vom Grad 3 zu klassifizieren. (Die Nummerierung unten bezieht sich auf die englische Ausgabe von [4], sollte aber hoffentlich mit der der deutschen übereinstimmen.)

(i) Der reduzible Fall: Man formuliere Lemma 4.1 und Proposition 4.10 in [4]. Die Wirkung der Gruppe PGL(3) muss man ggf. kurz wiederholen. Mit dem einfachen Beweis von Lemma 4.1 sollte man sich nicht aufhalten, evtl. genügt hier das instruktive Bild.

(ii) Schnittmultiplizität und Bézouts Satz. Man definiere $I_P(C, C')$ und berechne diese für ein Beispiel (Example 4.7). Man formuliere Bézouts Satz und beweise den Spezialfall, dass einer der Kurven eine Gerade ist. Beweis von Proposition 4.10.

(iii) Der singuläre irreduzible Fall: Man formuliere Proposition 4.11. Der Beweis wird in den nächsten Vortrag verschoben.

(iv) Der glatte (und besonders interessante) Fall: Man beweise, dass jede glatte Kubik projektiv äquivalent zu einer Kubik in Weierstraß Form ist (Prop. 4.23). (Dass zwei ebene Kurven sich immer schneiden, wird ohne Beweis verwendet.)

(v) Diskriminante einer Kubik in Weierstraß Form und Glattheit (Prop. 4.24).

(vi) Die j-Invariante und projektive Äquivalenz (Prop. 4.28).

(Wir lassen die Gruppenstruktur auf glatten kubischen Kurven und die Beschreibung als Torus aus Zeitgründen unerwähnt.)

10. Geraden auf kubischen Flächen

Hierbei handelt es sich um einen der bekanntesten klassischen Sätze der algebraischen Geometrie: Eine glatte kubische Fläche $S \subset \mathbb{P}^3$ enthält genau 27 Geraden. Wir werden diesen Satz nicht vollständig beweisen, aber sehen, dass S immer eine Gerade enthält und woher die Zahl 27 kommt. Wir stützen uns auf Kapitel 5 in [4] (Nummerierung der englischen Ausgabe), welches wiederum auf [5] basiert. Verwenden Sie die vorhandenen Modelle kubischer Flächen!

(i) Der Tangentialraum an einen Punkt schneidet die Fläche S in einer singulären Kubik. Für mindestens einen Punkt ist diese Kurve sogar noch spezieller (Lemma 5.3). (Wiederum verwenden wir ohne Beweis, dass sich zwei Hyperflächen immer schneiden.) Der Beweis von Lemma 5.3 stützt sich auf den Beweis von Proposition 4.11, der hier gegeben werden soll.

(ii) Kurze Wiederholung der Eigenschaft der Resultante zweier Polynome (siehe Vorlesung Algebra I) und Beweis von Theorem 5.1, dass jede glatte Kubik $S \subset \mathbb{P}^3$ eine Gerade enthält.

(iii) Man erwähne Remark 5.8, welche andeutet, warum man genau 27 Geraden erwartet.

(iv) Man benutze die Existenz zweier disjunkter Geraden, um die Rationalität glatter Kubiken $S \subset \mathbb{P}^3$ zu zeigen (Prop. 5.17, ii)). Rationale Abblildungen werden erst später ausführlich besprochen, man konstruiere hier also einfach nur die reguläre injektive Abbildung von einer offenen Menge von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ auf S. Man erwähne die Beziehung zu Satz von Lüroth aus der Vorlesung Algebra I.

11. Rationale Abbildungen

Rationale Abbildungen zwischen Varietäten sind reguläre Abbildungen, die aber nur auf einer offenen nichtleeren Menge definiert sind. Wir benutzen [2, Ch. 7, 18].

(i) Definition des Funktionenkörpers einer irreduziblen(!) (affinen) Varietät.

(ii) Diskussion des Begriffs einer rationalen Abbildung, S. 73-75. Man siehe auch [4, Sect. 1.3] für eine formalere Behandlung.

(iii) Falls eine rationale Abbildung $\varphi : X \dashrightarrow Y$ dominant ist, definiert sie eine Körpererweiterung $K(Y) \subset K(X)$. Man erkläre die Begriffe 'birational', 'rational' und 'unirational' und was sie für die Funktionenkörper bedeuten.

(iv) Quadriken $S \subset \mathbb{P}^3$ sind rational, Example 7.11.

(v) Jede glatte Kubik $X \subset \mathbb{P}^4$ is unirational (aber nicht rational, was viel schwieriger zu beweisen ist). Man stütze sich auf [2, Example 18.19], vgl. auch [4, Thm. 5.19].

12. Aufblasungen

Aufblasungen modifizieren eine Varietät, ohne den birationalen Typ zu verändern (d.h. auf einer dichten offenen Teilmenge passiert nichts). Jede rationale Abbildung kann durch Aufblasungen zu einer regulären gemacht werden. Noch viel wichtiger ist, dass zumindest in Charakteristik null, jede Varietät durch Aufblasungen geglättet werden kann. (Das berühmte Resultat von Hironaka über die Auflösbarkeit von Singularitäten, vgl. [6], S. 106, 119.) Verwenden Sie das dann hoffentlich vorhandene Modell (oder sonst das entsprechende Bild in [3]).

(i) Aufblasung eines Punktes. Die verschiedenen Sichtweisen sind in [2, Example 7.17] erklärt. Vgl. S. 28-30 in [3] und S. 107-109 in [6].

(ii) Ausführliche Diskussion der Aublasung der Singularität der Kurve $y^2 = x^3$ nach [3, Example I.4.9] und des zwei-dimensionalen Kegels nach [6], S. 110-112.

(iii) Der allgemeine Fall, dass Untervarietäten aufgeblasen werden, ist in [2, Example 7.18] behandelt Vgl. [6], S. 117-119.

(iv) Die klassische Konstruktion für komplexe Mannigfaltigkeiten ist auf S. 83 in [2] erklärt. Da wir diese Theorie nicht voraussetzen, kann hier nur ein Eindruck gegeben werden. Auf jeden Fall sollte man aber erwähnen, dass die Faser über einem Punkt der Untervarietät genau der projektivierte Normalenraum ist.

(v) Theorem 7.21 in [2] kann nur formuliert werden.

(vi) Example 7.22 in [2] zeigt, wie die Abbildung $Q \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ in Example 7.11 aufgelöst werden kann. Das gibt eine explizite Bebschreibung der 'birationalen Korrespondenz' $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \leftrightarrow \mathbb{P}^2$.

References

[1] W. Fulton *Algebraic curves.* Addison Wesley 1969.
[2] J. Harris *Algebraic geometry. A first course.* GTM 133. Springer 1992.
[3] R. Hartshorne *Algebraic geometry.* GTM 52. Springer 1977.
[4] K. Hulek *Elementare algebraische Geometrie.* Vieweg 2000.
[5] M. Reid *Undergraduate algebraic geometry.* LMS Student Texts 12. 1988.
[6] K. Smith et al *An invitation to algebraic geometry.* Springer 2000.