THEMEN BACHELORARBEITEN SS 2012

D. HUYBRECHTS

Contents

1. Galoistheorie, Monodromiegruppen und Wendepunkte kubischer Kurven 2
2. Hessesche Kurven und elliptische modulare Flächen 3
3. Kubische Flächen und Charaktervarietäten 4
4. Modulraum kubischer Flächen 5
5. Hessesche K3 Fläche einer Kubik 6
6. Fano Varietäten von Geraden 7
7. Hilbert Schemata und Fano Varietäten von Geraden 8
8. Fette Punkte und Interpolation 9
9. Punkte auf Geraden und Gale Dualität 10
10. (Uni)rationalität von Hyperflächen 11

Ziel der Bachelorarbeit ist es, ein mathematisches Thema selbstständig zu durchdringen und mündlich und schriftlich präzise darzustellen. Ausgangspunkt aller Themen im SS 2012 werden (oft einer, manchmal auch zwei oder drei) Artikel aus dem Gebiet der algebraischen Geometrie sein. Einige Themen lassen sich mit dem Wissen des vorangegangenen Seminars und der Vorlesungen zur Galoistheorie und kommutativen Algebra direkt angehen, für andere sind Vorarbeiten erforderlich.

Dinge, die Sie neben der eigentlichen Mathematik, bei der Anfertigung der Bachelorarbeit lernen sollen: i) Latex; ii) Erschließung mathematischer Quellen (arxiv, mathscinet); iii) Zitieren mathematischer Quellen iv) sprachliche Prägnanz (Deutsch oder Englisch); v) Kommunizieren Sie Fortschritte und stellen Sie Fragen.

Profitieren Sie von Ihren Kommilitonen! Bewußt sind die Themen so gewählt, dass man sich gewisse Dinge gemeinsam erarbeiten kann. Jedes Thema ist ausbaufähig, fühlen Sie sich durch die relativ detaillierte Themenbeschreibung nicht eingeengt. Suchen Sie das Gespräch mit Studenten höherer Semester und Mitgliedern meiner Arbeitsgruppe.

Organisation:
– 3 Vorträge à 30-45 min im Verlauf des SS.
– Vor dem ersten Vortrag (Vorstellung des Themas) Gespräch mit mir und einem anderen Mitglied meiner Arbeitsgruppe (je früher desto besser).
– Vor(!) dem zweiten und dem dritten Vortrag werden schriftliche (Latex!) Ausarbeitungen vorgelegt.
– Die endgültige Version der Bachelorarbeit wird nach dem dritten Vortrag offiziell eingereicht.

1. Galoistheorie, Monodromiegruppen und Wendepunkte kubischer Kurven

Eine glatte kubische Kurve $C = Z(f) \subset \mathbb{P}^2$ hat genau 9 Wendepunkte (d.h. die Tangente hat Schnittmultiplizität 3 in diesen Punkten). Wenn man im Raum $k[x_0, x_1, x_2]_3$ eine Schleife f_t, $t \in [0,1]$ wählt, so dass alle $Z(f_t)$ glatt sind, dann definiert das eine Permutation der 9 Wendepunkte von $Z(f_0)$. Die dadurch erzeugte Untergruppe von S_9 kann explizit beschrieben werden. Dies soll der Gegenstand dieser Arbeit sein. Genauer sollen folgende Aspekte behandelt werden:

1. Galoisgruppe und Monodromie: Im Kapitel I der Arbeit [H] werden zwei Gruppen für eine endliche Abbildung $X \longrightarrow Y$ zwischen Varietäten definiert: i) Die Galoisgruppe der Körpererweiterung $K(X)/K(Y)$ der Funktionenkörper, ii) Die topologische Monodromie. Beide Gruppen stellen sich als isomorph heraus. (Hinweise: Den Begriff der meromorphen Funktion kann man umgehen, da nur Einschränkungen rationaler Funktionen benutzt werden. Einige Grundbegriffe der Topologie werden vorausgesetzt: Überlagerungsabbildungen und π_1.)

2. Die Plücker Formel $\sum(m(\ell) - e(\ell)) = 3d(d-1)$ beschreibt die Anzahl der Wendepunkte einer ebenen Kurve $C \subset \mathbb{P}^2$ vom Grad d. Der Spezialfall $d = 3$ liefert die 9 Wendepunkte einer kubischen Kurve. Das entspricht Kapitel II.1. in [H]. (Hinweise: Hier benutzt man neben Grundkenntnissen der algebraischen Geometrie aus dem WS auch die Hurwitzformel, um den Grad der dualen Kurve zu bestimmen. Diese kann zitiert werden, evtl. gibt es aber auch einen ad hoc Beweis für ebene Kurven.)

3. Wendepunkte kubischer Kurven $C \subset \mathbb{P}^2$ lassen sich genauer studieren, wenn man C als Torus $\mathbb{C}/\Lambda$ realisiert. Hierzu muss man sich Grundkenntnisse über die Weierstraßsche $\wp$-Funktion erarbeiten (z.B. wie im Buch von Remmert dargestellt). Grundkenntnisse der Funktionentheorie sind absolut erforderlich. Kapitel II.2 in [H].

4. Bestimmung der Galoisgruppe der Wendepunkte glatter kubischer Kurven als $\mathrm{ASl}(2, \mathbb{F}_3)$. Kapitel II.2 in [H]. Man vergleiche dies mit der Diskussion in [AD], Seite 9-10.

5. Da sich die Galoisgruppe als auflösbar herausstellt, kann man versuchen, die Wendepunkte explizit (in Abhängigkeit von den Koeffizienten der kubischen Gleichung) zu bestimmen. Die Diskussion auf Seite 697 ist optional. Kapitel II.2 in [H].

Literatur

[AD] M. Artebani, I. Dolgachev *The Hesse pencil of plane cubic curves.* L'Enseignement Mathématique, 2(55), (2010), 1–39.

[H] J. Harris *Galois groups of enumerative problems.* Duke Math. J. 46 (1979), 685–724.

2. Hessesche Kurven und elliptische modulare Flächen

Zu einer ebenen kubischen Kurve $C = Z(f) \subset \mathbb{P}^2$ kann man die Hessische Kurve $\mathrm{Hess}(C) = Z(\mathrm{Hess}(f)) \subset \mathbb{P}^2$ assoziieren. Hierbei ist $\mathrm{Hess}(f) = \det(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})$. Diese Konstruktion läßt sich besonders gut für die Hesseschen Kurven, also Kurven der Form $Z(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + tx_0x_1x_2)$, verstehen. Gegenstand dieses Themas sind die verschiedenen, insbesondere globalen, Aspekte dieser Konstruktion.

1. Jede glatte Kubik $C \subset \mathbb{P}^2$ is projektiv äquivalent zu einer Hesseschen Kurve. Folgende Größen lassen sich für die Hesseschen Kurven explizit berechnen: i) Weierstraßsche Normalform, ii) Wendepunkte, iii) j-Invarianten. Auch kann man bestimmen, welche Hesseschen Kurven mehr als zwei Automorphismen besitzen. Hierzu stütze man sich auf die Abschnitte 2 in [AD] und in [PP]. Grundkenntnisse über elliptische Kurven (z.B. die additive Struktur) werden vorausgesetzt oder müssen erarbeitet werden.

2. Man beschreibe das Hesse Arrangement der 9 Wendepunkte und 12 Geraden. Insbesondere muss man zeigen, dass eine Gerade durch zwei Wendepunkte die Kurve in einem weiteren schneidet. Abschnitt 3 in [AD].

3. Die Zuordnung $Z(f) \longmapsto Z(\mathrm{Hess}(f))$ bildet eine Hessesche Kurve wieder auf eine solche ab. Wann ist das Bild wieder glatt? Die Situation läßt sich durch eine elliptische Fläche $S(3) \longrightarrow \mathbb{P}^1$ beschreiben, die als Aufblasung von $\mathbb{P}^2$ in den 9 Wendepunkten aufgefaßt werden kann. (Dies ist die 'universelle Familie elliptischer Kurven mit 3-Level Struktur.) Alle Invarianten von $Z(\mathrm{Hess}(f))$, wie z.B. die j-Invariante, lassen sich explizit angeben. Man studiere dies Konstruktion als Abbildung $\mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1$.

4. Aufbauend auf obiger Konstruktion wird in [AD] auch noch die Cayleysche Kurve $\mathrm{Ca}(C)$ als Quotient von $\mathrm{Hess}(C)$ nach einem 2-Torsionspunkt beschrieben, ebenfalls wieder eine Hessesche Kurve (in der dualen Ebene).

5. Die Gruppe der Wendepunkte $\Gamma = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ operiert auf der gesamten Situation. Insbesondere kann man den Quotienten $S(3)/\Gamma$ studieren. Man stütze sich auf den Anfang von Abschnitt 5 in [AD].

Literatur

[AD] M. Artebani, I. Dolgachev *The Hesse pencil of plane cubic curves.* L'Enseignement Mathématique, 2(55), (2010), 1–39.

[PP] P. Popescu Pampu *Iterating the hessian: a dynamical system on the moduli space of elliptic curves and dessins d'enfants.* In: Non-commutativity and Singularities. Proceedings of French-Japanese Symposia, IHES, 2006. Adv. Stud. in Pure Math. 55 (2009), 83–98.

3. Kubische Flächen und Charaktervarietäten

In dieser Arbeit sollen die algebraisch-geometrischen Aspekte in [CL] und [GT] ausgearbeitet werden. Es geht um (affine) kubische Flächen und ihre Rolle bei der Beschreibung von Charaktervarietäten. Man betrachtet Darstellungen $\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1 \setminus \{p_1, \ldots, p_4\}) \longrightarrow \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$. (Die Fundamentalgruppe ist eine freie Gruppe in drei Erzeugern.) Der Raum $\mathrm{Rep}(\pi)$ dieser Darstellungen modulo Konjugation kann als kubische Hyperfläche in $\mathbb{C}^7$ beschrieben werden. Wenn man die Konjugationsklassen der Schleifen γ_i um die Punkte $p_i \in \mathbb{P}^1$ festsetzt (d.h. ihre Spur), dann erhält man eine Abbildung $\mathrm{Rep}(\pi) \longrightarrow \mathbb{C}^4$ deren Fasern kubische Flächen sind. Das zentrale Resultat ist: Alle glatten kubischen Flächen mit einer generische Bitangentialebene kommen als Fasern vor. Achtung: Die beiden Arbeiten [CL] und [GT] streifen sehr viele verschiedene Gebiete (Topologie, Dynamik, Painlevé Gleichungen, etc). Man muss das relevante Material ausgraben und viele interessante Dinge unbeachtet lassen.

1. Klassische Theorie kubischer Flächen. Die 27 Geraden wurden im Seminar behandelt. Dazu kommen jetzt die 45 Bitangentialebenen an eine glatte Kubik und Eckhardt Punkte. Der historische Aufsatz [D] ist sehr empfehlenswert.

2. Die Cayleysche Kubik ist die Kubik mit den meisten gewöhnlichen Doppelpunkten, nämlich 4. (Eventuell kann man den Beweis aus der Diskussion am Ende von Kapitel 4 im Buch von Griffiths, Harris herausarbeiten. Vgl. auch Thema 5.) Die Cayleysche Kubik ist durch $\sum_0^3 (1/x_i) = 0$ beschrieben. Jede Kubik kann in einer pentahedralen Form als $\sum_0^4 a_i y_i^3 = 0 = \sum y_i$ gegeben werden. Wie sieht diese für die Cayleysche Kubik aus?

3. Die Beschreibung von $\mathrm{Rep}(\pi)$, siehe [CL], [GT].

4. Die Familie $\mathrm{Rep}(\pi) \longrightarrow \mathbb{C}^4$, $\rho \longmapsto (\mathrm{tr}(\rho(\gamma_i)))$. Ist Faserprodukt einer Familie $\mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}^4$ (S. 3-4 in [CL]). Alle kubischen Flächen mit einer generischen Bitangentialebene kommen als Fasern $S_{(A,B,C,D)}$ (vgl. Theorem 1 in [GT]).

5. Eine Faser $S_{(A,B,C,D)}$ ist die Cayleyschen Kubik, siehe Theorem 2.1 und Appendix A in [CL]. In diesem Abschnitt findet man eine weitere Beschreibung der Cayleyschen Kubik als Quotient von $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$.

6. Weitere Fragen: Welche Fasern von $\mathcal{S} \longrightarrow \mathbb{C}^4$ sind (als affine oder projektive Flächen) singulär (siehe Theorem 9.4 in [CL])? Die Singularitäten können in Termen der dadurch parametrisierten Darstellung verstanden werden. Kommen manche Flächen mehrmals vor? (Das ist die Frage, ob diese Familie 'universell' ist.)

Literatur

[CL] S. Cantat, F. Loray *Holomorphic dynamics, Painlevé VI equation, and character varieties.* Annales de l'Institut Fourier 59 (2009), 2927–2978.

[D] I. Dolgachev *Luigi Cremona and cubic surfaces.*, Incontro di Studio, 36, Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Milan (2005), 55–70,

[GT] W. Goldman, D. Toledo *Affine cubic surfaces and relative SL(2)-character varieties of compact surfaces.* arXiv:1006.3838.

4. Modulraum kubischer Flächen

Diese Arbeit soll einen detaillierten Beweis der folgenden Aussage erarbeiten:
Der Modulraum kubischer Flächen ist isomorph zum gewichteten projektiven Raum $\mathbb{P}(1,2,3,4,5)$.

Hierbei ist der Modulraum der kubischen Flächen der Quotient (einer offenen Menge) des Raumes aller kubischen Flächen $S \subset \mathbb{P}^3$ nach der natürlichen Wirkung von PGl(4). Dieser Modulraum wurde in den letzten Jahren intensiv untersucht. Z.B. kann er auch als Quotient einer offenen Menge eines vierdimensionalen Balls $B \subset \mathbb{C}^4$ beschrieben werden (man vgl. die Referenzen in [B]). Hier geht es allerdings eher um die klassische Theorie.

1. Im Abschnitt 6 von [B] werden die grundlegenden Begriffe der Geometrischen Invarianten Theorie (GIT) zusammengestellt. Im Fall der Wirkung von PGl(4) auf dem Raum der Kubiken in 4 Variablen werden die stabilen und semistabilen Punkte genau bestimmt. (Der Begriff des gewöhnlichen Doppelpunkt muss bereitgestellt werden. Man vergleiche diesen Teil mit dem entsprechenden in der Referenz [ACT].)

2. Sylvester Form einer Kubik: $\sum_0^4 x_i = 0$, $\sum_0^4 \lambda_i x_i^3 = 0$, vgl. [DvG, S. 2].

3. Gewichtete projektive Räume: Definition und Bestimmung der Singulariäten von $\mathbb{P}(1,2,3,4,5)$, vgl. [DvG, Abschnitt 6.9].

4. Bestimmung des Raumes der Invarianten. Für Kubiken in Sylvester Form sind diese in [DvG, Abschnitt 3.3] beschrieben. Das führt zur Beschreibung des Modulraums als $\mathbb{P}(1,2,3,4,5)$. Achtung! Die Literaturlage ist an diesem Punkt sehr schlecht. Man siehe in [D] für weitere Referenzen, insbesondere einen Artikel von Beklemishev. (Dolgachevs Lecture Notes zur GIT enthalten evtl. weitere hilfreiche Bemerkungen.)

5. Die singulären Punkte entsprechen speziellen Kubiken.

6. Im Theorem 6.6 in [DvG] werden interessante Hyperflächen in $\mathbb{P}(1,2,3,4,5)$ in Termen der dadurch beschriebenen Kubiken diskutiert.

Literatur

[B] A. Beauville *Moduli of cubic surfaces and Hodge theory (after Allcock, Carlson, Toledo).* Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités, 445–466, Sémin. Congr., 18, Soc. Math. France, Paris, 2009.

[DvG] E. Dardanelli, B. van Geemen *Hessians and the moduli space of cubic surfaces.* Contemp. Math. 422, (2007), 17–36.

[D] I. Dolgachev *Classical algebraic geometry: a modern view.* Cambridge UP.

5. Hessesche K3 Fläche einer Kubik

Ähnlich wie beim Thema 2 kann man zu jeder kubischen Fläche $S \subset \mathbb{P}^3$ gegeben durch $F = 0$ die Hessesche Fläche $\mathrm{Hess}(S) \subset \mathbb{P}^3$ als Nullstellenmenge der Determinante von $(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j})$ assoziieren. Die Hessesche Fläche $\mathrm{Hess}(S)$ ist eine Fläche vom Grad vier und immer singulär. (Die minimale Auflösung ist ein Beispiel einer K3 Fläche.) Es sollen moderne Beweise für die wichtigsten Eigenschaften dieser Konstruktion ausgearbeitet werden. Insbesondere für kubische Flächen in Sylvester Form. Man vergleiche die Liste klassischer Ergebnisse in [DK]. Die Beschreibung der transzendenten Gitter in [DvG] (Hauptgegenstand des Artikels) geht über das verlangte Niveau einer Bachelorarbeit hinaus.

1. Die Hessesche $\mathrm{Hess}(S)$ einer Kubik S in Sylvesterform hat mindestens 10 singuläre Punkte. Die Fläche S is glatt genau dann, wenn $\mathrm{Hess}(S)$ keine weiteren Singularitäten besitzt.

2. Für kubische Flächen S, die nicht in Sylvester Form gebracht werden können, ist $\mathrm{Hess}(S)$ wesentlich singulärer, selbst für S glatt, vgl. [DvG, Abschnitt 5].

3. Eckardt Punkte von S und Geraden in $\mathrm{Hess}(S)$.

4. Ist die Abbildung $S \longmapsto \mathrm{Hess}(S)$ injektiv? (Zumindest für glatte Kubiken in Sylvester Form?)

5. In [R] werden solche Kubiken S in Sylvester Form beschrieben, für die $\mathrm{Hess}(S)$ eine Kummer Fläche ist. Wenn man als Definition einer Kummer Fläche die Existenz von 16 Doppelpunkten annimmt (siehe Seite 9), dann müßte der Beweis des Hauptresultats dieser Arbeit zugänglich sein.

Literatur

[DvG] E. Dardanelli, B. van Geemen *Hessians and the moduli space of cubic surfaces.* Contemp. Math. 422, (2007), 17–36.

[DK] I. Dolgachev, J. Keum *Birational automorphisms of quartic Hessian surfaces.* Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002), 3031–3057.

[D] I. Dolgachev *Classical algebraic geometry: a modern view.* Cambridge UP.

[R] J. Rosenberg *Hessian quartic surfaces that are Kummer surfaces.* math/9903037

6. Fano Varietäten von Geraden

Hauptgegenstand soll der Artikel [BvdV] sein, in dem grundlegende Fakten über Fano Varietäten $F(X)$ von Geraden in Hyperflächen $X \subset \mathbb{P}^n$ bewiesen werden: Unter gewissen Bedingungen an Grad und Dimension von X wird bewiesen, dass $F(X)$ nicht leer, glatt bzw. zusammenhängend ist.

1. Fano Varietäten von Geraden in Untervarietäten $X \subset \mathbb{P}^n$. Konstruktion als projektive Varietät und der Begriff der universellen Familie.

2. Der Fall einer Hyperfläche $X \subset \mathbb{P}^n$. Vollständiger Beweis von Theorem 8 in [BvdV]. Die Argumente verwenden nur klassische Methoden wie bereits im Seminar besprochen. Nur zwei Ausnahmen sind mir bewußt: Die Normalenbündelsequenz und ein wenig Kohomologietheorie.

3. Eine Variante von [BvdV], die sich auch auf gewisse vollständige Durchschnitte anwenden läßt, findet man im Abschnitt 1 von [BM] (Proposition 1.1). Hier werden ausser einer Quartik $X \subset \mathbb{P}^4$ auch noch $X = Q \cap C \subset \mathbb{P}^5$ (Durchschnitt einer Quadrik und einer Kubik) und $X = Q \cap Q' \cap Q'' \subset \mathbb{P}^6$ (Durchschnitt dreier Quadriken) behandelt. Die $F(X)$ sind für generisches X glatte Kurven. (Was ist ihr Geschlecht?)

4. Für die vierdimensionalen Varianten der drei Beispiele wird in [BM] gezeigt, dass die Fano Varietäten glatt und drei-dimensional sind. Den Vergleich der beiden Fälle findet man im Abschnitt 6.

Literatur

[BvdV] W. Barth und A. Van de Ven *Fano-Varieties of lines on hypersurfaces.* Archiv der Mathematik 31 (1978), 96–104.

[BM] S. Bloch, J. Murre *On the Chow group of certain types of Fano threefolds.* Comp. Math. 39 (1979), 47–105.

7. Hilbert Schemata und Fano Varietäten von Geraden

Ziel dieser Arbeit soll es sein, zwei fundamentale Konstruktionstruktionen der algebraischen Geometrie in sehr speziellen Situationen zu studieren und die enstehenden Varietäten miteinander zu vergleichen. Grundlage ist die Arbeit [BD]. Das Hilbert Schema $\mathrm{Hilb}^2(S)$ einer glatten Fläche parametrisiert Unterschemata $Z \subset S$ der Länge zwei (also generisch einfach nur zwei Punkte in S). Für eine Varietät $X \subset \mathbb{P}^n$ ist $F(X)$ die Fano Varietät von Geraden in $\mathbb{P}^n$, die in X liegen. In [BD] wird eine Situation einer Fläche $S \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ und einer vier-dimensionalen Varietät $X \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V^*)$ (ebenfalls beschrieben als Kubik in $\mathbb{P}^5$) betrachtet, für die $\mathrm{Hilb}^2(S) \simeq F(X)$ gezeigt wird. Hierbei ist $V \simeq \mathbb{C}^6$.
(Die Arbeit vergleicht ebenfalls die Kohomologie von X mit der von $F(X)$ für allgemeine Kubiken $X \subset \mathbb{P}^5$, aber das würde den Rahmen der Bachelorarbeit vermutlich sprengen.)

1. Allgemeine Theorie der Fano Varieäten $F(X)$ von Geraden als projektive Varietäten. Für den Fall einer Kubik $X \subset \mathbb{P}^5$ ist $F(X)$ glatt und von der Dimension vier.

2. Die Literatur zu den allgemeineren Hilbert Schemata $\mathrm{Hilb}^n(S)$, welche Unterschemata der Länge parametrisieren, ist reichhaltig. Die allgemeine Theorie kann man für $n = 2$ umgehen, in dem man $\mathrm{Hilb}^2(S)$ als Quotient der Aufblasung von $S \times S$ in der Diagonale nach der natürlichen Wirkung von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ einführt. Äquivalent dazu, kann man $\mathrm{Hilb}^2(S)$ auch direkt als Aufblasung des symmetrischen Produktes $S^2(S)$ entlang der Diagonale beschreiben. Für eine Einführung und Literaturverweise siehe man [L].

3. Der Vergleich von $\mathrm{Hilb}^2(S)$ und $F(X)$ in der Situation von [BD] soll in allen Details gegeben werden. Die Argumente in [BD] sind stellenweise nur skizziert. (Glattheit der Varietäten, Grad der Grassmannschen, die verwendeten Aussagen aus der linearen Algebra, etc.)

4. Rationalität der speziellen Kubik X.

5. Falls Grundkenntnisse der algebraischen Topologie vorhanden sind, würde eine Skizze der Aussagen zur Kohomologie von $F(X)$ die Darstellung abrunden.

Literatur

[BD] A. Beauville, R. Donagi *La variété des droites d'une hypersurface cubique de dimension 4.* C.R. Acad. Sc. Paris 301 (1985), 703–706.

[BvdV] W. Barth und A. Van de Ven *Fano-Varieties of lines on hypersurfaces.* Archiv der Mathematik 31 (1978), 96–104.

[L] M. Lehn *Lectures on Hilbert schemes.* CRM Proceedings and Lecture Notes 38 (2004), 1–30.

8. Fette Punkte und Interpolation

An Hand des Übersichtsartikel [Ha] (vgl. auch [C]) sollen einige, meist erstaunlich schwierige Fragen zur Verteilung von Punkten im projektiven Raum diskutiert werden. Man betrachtet $\Gamma \subset \mathbb{P}^n$, welches entweder eine endliche Vereinigung reduzierter Punkte ist oder aus endlich vielen 'fetten' Punkten besteht, d.h. Punkte, die lokal durch das Ideal $\mathfrak{m}_x^k$ gegeben sind. Frage: Was ist der Zusammenhang zwischen der 'Verteilung' von Γ und der Anzahl der Bedingungen, die Γ an Polynome eines gegebenen Grades stellt?

1. Zur Aufwärmung: Komplette Beweise der elementaren Theoreme 1.1 und 1.2 über Polynome in einer Variablen. Hilbert Funktionen wie im Seminar behandelt, müssen für die in [Ha] behandelte Situation aufbereitet werden (für null-dimensionale Γ, aber auch für Untervarietäten höherer Dimension).

2. Reduzierte Punkte und Castelnuovos Sätze: Die Hilbertfunktion von Γ in linear allgemeiner Lage ist nach unten beschränkt und die untere Schranke ist scharf.

3. Die vermutete Verallgemeinerung der Beschreibung der Grenzfälle (Conj. 2.3) steht in enger Verbindung zu Fragen nach der Realisierbarkeit von Kurven von gegebenem Grad und Geschlecht. Das Geschlecht einer Kurve ist eine wichtige Invariante von Kurven, die Beschreibung durch die Hilbertfunktion sollte aber ausreichen (im Hintergrund steht der Satz von Riemann-Roch). Wie ensteht die Fläche, in der eine Kurve maximalen Geschlechts einthalten sein soll (S. 169 oben)?

4. Das Theorem von Alexander und Hirschowitz über quadratisch fetten Punkte, die keine maximalen Bedingungen stellen. Die konkreten Beispielen lassen sich komplett verstehen. Ist der Beweis des Theorem selbst zugänglich?

5. Viel schwieriger sind fette Punkte höherer Ordnung, selbst in $\mathbb{P}^2$.[1] Hier gilt es die Harbourne–Hirschowitz Vermutung zu verstehen. Die kohomologische Sprache in [Ha] kann komplett vermieden werden, man siehe z.B. [Y]. Auch der Begriff der Selbstschnittzahl kann umgangen werden: Eine (-1)-Kurve ist die exzeptionelle Kurve, die beim Aufblasen einer Fläche in einem glatten Punkt entsteht.

7. Die Harbourne–Hirschowitz Vermutung impliziert die Nagata Vermutung, die den Grad von Kurven $C \subset \mathbb{P}^2$ mit $n > 9$ Punkten der Multiplizität m nach unten durch $m\sqrt{n}$ beschränkt.

Literatur

[C] C. Ciliberto *Geometric Aspects of Polynomial Interpolation in More Variables and of Waring's Problem.* Proc. ECM 2000, 289–317.

[Ha] J. Harris *Interpolation.* Curr. Dev. in Alg. Geom. MSRI Publ. Vol. 59, 2011.

[L] R. Lazarsfeld *Positivity in Algebraic Geometry I.* Springer 2005.

[Y] S. Yang *Linear systems in $\mathbb{P}^2$ with base points of bounded multiplicity.* J. Alg. Geom. 16 (2007), 19–38.

[1] Die auf Seite 172 formulierte Frage, ob Σ nach unten beschränkt ist (in char $= 0$) wurde unlängst negative durch Th. Bauer et al beantwortet.

9. Punkte auf Geraden und Gale Dualität

Ziel soll es sein, eine detaillierte Erklärung des Diagramms auf Seite 2 in [HMSV1] zu erarbeiten. Viele der Details findet man in der Arbeit [HMSV2] und in den dort aufgeführten Quellen. Es geht um die Beziehung folgender Konstruktionen:

i) $(\mathbb{P}^1)^6/\!/\mathrm{PGl}(2) \simeq S_3 \subset \mathbb{P}^4$, wobei die Segre Kubik S_3 durch die zwei Gleichungen $\sum x_i = \sum x_i^3 = 0$ im $\mathbb{P}^5$ gegeben ist (analog zur Clebsch Diagonalfläche).
ii) $(\mathbb{P}^3)^6/\!/\mathrm{PGl}(4) \simeq I_4$, wobei I_4 die Igusa Quartik ist, die durch die beiden Gleichungen $\sum y_i = (\sum y_i^2)^2 - 4\sum y_i^4$ in $\mathbb{P}^{5*}$ beschrieben wird.
iii) $(\mathbb{P}^2)^6/\!/\mathrm{PGl}(3) \longrightarrow \mathbb{P}^{4*}$ ist eine Doppelüberlagerung, die entlang von I_4. verzweigt ist.

i) und ii) werden durch die Gale Dualität in Beziehung gesetzt, die 6 Punkte auf $\mathbb{P}^1$ auf 6 Punkte auf der rationalen Normkurve $\nu_3(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^3$ abbildet. Die Gale Dualität liefert auch die Doppelüberlagerung in iii).
Die darstellungstheoretischen Fragen in [HMSV2] sind interessant, sollen aber nicht im Vordergrund stehen. Die algebraische Geometrie der beteiligten Varietäten soll zentraler Gegenstand sein.

1. Die Grundbegriffe der Geometrischen Invarianten Theorie (GIT) müssen bereitgestellt werden. Die Darstellung sollte auf den Fall von Punkten im $\mathbb{P}^n$ zugeschnitten werden, genauer auf die drei relevanten Quotienten: $(\mathbb{P}^1)^6/\!/\mathrm{PGl}(2)$, $(\mathbb{P}^3)^6/\!/\mathrm{PGl}(4)$ und $(\mathbb{P}^2)^6/\!/\mathrm{PGl}(3)$.

2. Explizite Beschreibung der drei Quotienten wie oben.

3. Gale Dualität bildet N generische Punkte im $\mathbb{P}^r$ auf N generische Punkte im $\mathbb{P}^s$ ab, wobei $r + s + 2 = N$.

4. Gale Dualität liefert eine birationale Abbildung $(\mathbb{P}^1)^6/\!/\mathrm{PGl}(2) \leftrightarrow (\mathbb{P}^3)^6/\!/\mathrm{PGl}(4)$. Wie kann man diese auf dem Niveau von S_3 und I_4 verstehen?

5. Gale Dualität beschreibt die Überlagerungsabbildung von $(\mathbb{P}^2)^6/\!/\mathrm{PGl}(3) \longrightarrow \mathbb{P}^{4*}$.

6. In [HMSV2] wird die Konstruktion aus dem Blickwinkel der natürlichen Wirkungen der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_6$ studiert.

Literatur

[HMSV1] B. Howard, J. Millson, A. Snowden, R. Vakil *The relations among invariants of points on the projective line.* CRAS 347 (2009), 1177–1182.

[HMSV2] B. Howard, J. Millson, A. Snowden, R. Vakil *A description of the outer automorphism of S_6 and the invariants of six points in projective space.* J. Combin. Th. Ser. 115 (2998), 1296–1303.

10. (Uni)rationalität von Hyperflächen

Lüroths Theorem besagt, dass jeder nichttriviale Zwischenkörper $k \subset K \subset k(t)$ zwischen einem algebraisch abgeschlossenen Körper k und einer rein transzendenten Erweiterung selbst rein transzendent ist. Auf die Funktionenkörper algebraischer Varietäten übertragen liest sich das als die Aussage, dass unirationale Varietäten der Dimension eins immer rational sind. Diese Aussage ist in höheren Dimensionen falsch, in Charakteristik null allerdings noch richtig in Dimension zwei. Im allgemeinen ist es äußerst schwer zu entscheiden, ob eine unirationale Varietät rational ist. Leichter ist es häufig, die Unirationalität zu prüfen und dies soll hier im Fall von Hyperflächen kleinen Grades (klein im Vergleich zur Dimension) diskutiert werden. Schwerpunkt der Arbeit soll die ausführliche Darstellung von Abschnitt 2 in [HMP] sein.

1. Bereitstellung der Grundkonzepte: Rationalität und Unirationalität (algebraisch und geometrisch); Quadriken und Kubiken in $\mathbb{P}^3$ sind rational; Flächen $X \subset \mathbb{P}^3$ vom Grad $d \geq 4$ sind nicht mehr rational (zitieren); Lüroth Problem.

2. Gegenbeispiele in positiver Charakteristik, dass unirational rational impliziert. In [Sh] wird z.B. die Fermatquartik in $\mathbb{P}^3$ für $p \equiv 3(4)$ behandelt. Weitere Beispiele (bereits von Tate diskutiert) findet man in notes von B. Hassett ('Rational curves on K3 surfaces').

3. Als Ausgangspunkt der Betrachtungen in [HMP] muss man zeigen, dass Hyperflächen kleinen Grades lineare Unterräume enthalten.

4. Der Fall von Kubiken $X \subset \mathbb{P}^n$, vgl. Abschnitt 2.1 in [HMP].

5. Diskussion des Falls von Quartiken: Hier wird das Problem auf die Irreduzibilität einer Fano-Korrespondenz zurückgeführt.

6. Fano-Korrespondenzen sind im allgemeinen nicht irreduzibel, vgl. Abschnitt 2.3.

7. Formulierung des Hauptresultats in [HMP] und Vergleich mit den Aussagen in [PS] (man beschränke sich auf den Fall von Hyperflächen für den eventuell [PS] zugänglich ist).

Literatur

[HMP] J. Harris, B. Mazur, R. Pandharipande *Hypersurfaces of low degree.* Duke Math. J. 95 (1998), 125–160.

[PS] K. Paranjape, V. Srinivas *Unirationality of the general complete intersection of small multidegree.* Astérisque 211 (1992).

[Sh] T. Shioda *An Example of Unirational Surfaces in Characteristic p.* Math. Ann. 211 (1974), 233–236.