SEMINAR: KONSTRUKTIONEN DER ALGEBRAISCHEN GEOMETRIE (WS 2011/12)

D. HUYBRECHTS

Ziel des Seminars ist es, sich mit grundlegenden Begriffen, Beispielen und Konstruktionen der algebraischen Geometrie vertraut zu machen. Die moderne algebraische Geometrie in ihrer schematheoretischen Sprache wird Gegenstand der Vorlesung im SS 2012 sein. Die geometrische Intuition, die im Seminar entwickelt werden soll, wird für das Verständnis der abstrakten Begriffe (Garbe, Schemata, Kohomologie etc.) später hilfreich sein. Wir werden möglichst viele direkt zugängliche Konstruktionsmethoden studieren, gelegentlich dabei aber gewisse Fakten einfach akzeptieren, die mehr Technik (etwas aus der parallel stattfindenden Vorlesung Algebra II oder der Vorlesung aus dem SS 2012) benötigen. Die Konstruktion interessanter Varietäten ist ein zentrales Problem der algebraischen Geometrie und die wichtigsten offenen Vermutungen haben mit diesem Problem zu tun (trotz der trügerischen Vielfalt der hier zu besprechenden Beispiele).

Das Seminar wird parallel zur Vorlesung Algebra II (Kommutative Algebra) angeboten. Allerdings werden die meisten Vorträge keine Vorkenntnisse erfordern, die über den Stoff der Vorlesungen GRM und Algebra I hinausgehen. Das Seminar bietet sich zur Vorbereitung auf die Erstellung einer Bachelorarbeit im SS an und ist tatsächlich Voraussetzung dafür.

Die **Teilnahme am Seminar** besteht (ausser der regelmäßigen Anwesenheit aus folgenden drei Teilen:
1. Erarbeitung eines Themenkomplexes und Auswahl des Stoffes für den eigentlichen Vortrag. (Man beachte, dass man für ein gutes Verständnis und dann einen guten Vortrag, mehr Stoff lernen muss, als man im Vortrag präsentieren kann.)
2. Vorbereitung und Halten des Vortrags. (Planen Sie Ihren Vortrag für 75min, um auf Fragen eingehen zu können. Das Programm ist so eng gestrickt, dass Sie wirklich nur eine Sitzung für Ihren Vortrag haben.)
3. Erstellen von Musterlösungen für zwei bis drei Übungsaufgaben und Korrektur eingehender Lösungen Ihrer Kommilitonen. (Die schriftliche Ausarbeitung des Vortrages ist hingegen nicht verlangt.)

Vorbereitung der Voträge. Die folgenden Beschreibungen der einzelnen Vorträge sind so detailliert, dass eine weitgehend eigenständige Vorbereitung möglich sein sollte. Zwei Wochen vor dem eigentlichen Vortrag stellen Sie mir das Grundkonzept für Ihren Vortrag kurz vor (Standardtermin Dienstag 13 Uhr). Eine Woche vor dem Vortrag steht Ihnen L. Galinat für technische Fragen zur Verfügung (ebenfalls Dienstag 13 Uhr). Letzte Unklarheiten sollten Sie mit mir am Donnerstag oder Freitag vor Ihrem Vortrag besprechen.

Anmeldung. Es sind bereits mehr Voranmeldungen für das Seminar als zu vergebende Vorträge bei mir eingegangen. Deshalb werde ich zuerst die Vorträge

1 und 10-15 vergeben (und dann weiter prioritär von hinten nach vorne vorgehen). Die Anmeldung sollte per email erfolgen. Bitte geben Sie Ihren Wunschvortrag plus eine Alternative an, für den Fall, dass es für gewisse Vorträge mehrere Bewerber gibt.

1. Affine und projektive Varietäten (Christian Hemminghaus)

Wir studieren Nullstellengebilde von Polynomen. Dies kann im affinen Raum $\mathbb{A}^n$ oder projektiven Raum $\mathbb{P}^n$ geschehen. Dieser Vortrag führt diese Räume und den Begriff einer (affinen oder projektiven) Varietät ein. Die bereits sehr interessanten Beispiele rationaler Kurven in Gestalt der getwisteten Raumkurve oder der rationalen Normkurve werden aus verschiedenen Gesichtspunkten diskutiert.

Der Grundkörper ist immer algebraisch abgeschlossen. Im Fall ausgeprägten Unbehagens bzgl. positiver Charakteristik, kann man gerne dabei an den Körper $\mathbb{C}$ denken.

Grundlage für diesen Vortrag ist [2, Lecture 1], welches komplett durchgearbeitet werden soll bis auf 1.8.,1.9, 1.29, 1.30. Allerdings kann bzw. soll nicht alles davon vorgetragen werden, s.u..

i) Definition von $\mathbb{A}^n$ und $\mathbb{P}^n$. Affine und projektive Varietäten, insbesondere Nullstellenmengen homogener Polynome. Homogenisierung von Polynomen. Man handle hier schon den Fall von Hyperflächen ab (1.7).

ii) Lineare Unterräume. Dimensionsformel für den Durchschnitt linearer Räume.

iii) Endliche Mengen sind interessanter als man denkt, allerdings werden wir diesen Teil kurz halten. Man definiere 'Punkte in allgemeiner Lage', bearbeite 1.6 und behandle das Doppelverhältnis (cross ratio). Theorem 1.4 gebe man nur an.

iv) Getwistete Kubik (1.10) und rationale Normkurven (1.14). Exercise 1.11 und 1.13 sollten nicht im Vortrag behandelt werden. 1.16. kann man eventuell ebenfalls weglassen. Theorem 1.18 sollte formuliert und bewiesen werden (dazu 1.17). Hingegen sollten 1.19-1.25 nicht in diesem Vortrag diskutiert werden.

v) Singuläre rationale Kurven. 1.26-1.28

Einige der im Buch formulierten Exercises bieten sich als Übungsaufgaben an. Auch könnte man den 'cross ratio' zu einer solchen verarbeiten.

2. Zariski Topologie und reguläre Funktionen (Tilman Becker)

Grundlage für diesen Vortrag ist [2, Lecture 2]. Nach dem Varietäten eingeführt wurden, werden nun Abbildungen zwischen diesen studiert. Die Veronese und Segre Abbildungen sind von grundlegender Bedeutung.

i) Man definiere und diskutiere die Zariski Topologie auf affinen und projektiven Varietäten.

ii) Affiner und homogener Koordinatenring. Insbesondere muss $I(X)$ für $X \subset \mathbb{A}^n$ bzw. $X \subset \mathbb{P}^n$ eingeführt werden. An dieser Stelle soll bereits auch $V(I)$ für ein (homogenes) Ideal $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ eingeführt werden (vgl. [2, Lecture 5]). Die Diskussion der Beziehung zwischen $I(V(I))$ und I wird auf später verschoben (Nullstellensatz).

iii) Was ist eine reguläre Funktion? Lemma 2.1 wird nur formuliert (benutzt wiederum den Nullstellensatz). Exercise 2.2.

iv) Der Begriff des lokalen Ringes muss definiert werden (eventuell aus Vorlesung zitieren) und nachgewiesen werden, dass der Ring der Keime (germ) regulärer Funktionen wirklich ein solcher ist.

v) Reguläre Abbildungen zwischen Varietäten. Diskussion des Beispiels S.22/23.

vi) Veronese Abbildung $\mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^N$. Definition und Beispiele: rationale Normkurve und die Veronese Fläche. (Example 2.6 ist eine gute Übung, Exercise 2.5 ist zu elementar.) Warum definiert die Veronese Abbildung einen Isomorphismus mit dem Bild? Vgl. Exercise 2.8, Exercise 2.9 (für die wirkliche Beschreibung von Varietäten ist die als Durchschnitt von Quadriken i.a. allerdings ungeeignet). Man vergleiche die Vorgehensweise in [2] mit der in [3, Exerc. I.2.12,2.13] und in [6, Sect. 5.1]. Man erwähne die koordinatenfreie Beschreibung der Veronese Abbildung auf Seite 25.

3. Segre Abbildung (Britta Kleberger)

Diese Vortrag ist als direkte Fortsetzung des vorangegangenen zu verstehen. Es lohnt sich, grundlegende Beispiele im Detail zu behandeln. Darüberhinaus wird der Graph einer regulären Abbildung und das Faserprodukt diskutiert. Grundlage ist [2, Lecture 2].

i) Segre Abbildung $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$. Das Bild ist wieder eine Varietät und damit wird $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ selbst zu einer projektiven Varietät. Diskussion des Beispiels $\Sigma_{1,1}$ (Seite 26). Man erwähne die Segre Abbildung in der koordinatenfreien Version auf Seite 31. Vergleiche das Vorgehen mit dem in [3, Exerc. I.2.14,2.15] und in [6, Sect. 5.3]..

ii) Bihomogene Polynome. Beispiel: Getwistete Kubik (Exercise 2.13., Exercise 2.17 und Text davor).

iii) Produkt von Varietäten und kategorielle Eigenschaft (Example 2.21). Wichtig ist, dass das Produkt nicht(!) die Produkttopologie trägt (Exercise 2.22). Faserprodukt (Example 2.25, Exercise 2.26). Man zeige, dass die Diagonale eine abgeschlossene Untervarietät ist (Exercise 2.15). Vgl. auch [1, Ch. 6].

iv) Man definiere den Graphen einer regulären Abbildung als Varietät.

4. Projektionen und Kegel (Christian Weiss)

Grundlage für diesen Vortrag sind [2, Lecture 3].

i) Man definieren die Projektion von einem Punkt (Example 3.4) und beweise Theorem 3.5. Hierzu muss man kurz(!) die Resultante von zwei Polynomen aus der Vorlesung Algebra I wiederholen. Exercise 3.8 könnte an dieser Stelle interessant sein.

ii) Das Bild einer projektiven Varietät unter einer regulären Abbildung ist wieder eine projektive Varietät (Theorem 3.13). Dazu betrachtet man zuerst die Spezialfälle auf Seite 38 und beweist dann Theorem 3.12.

iii) Der Kegel über einer Varietät X: Example 3.1 (der Fall, dass X in einer Hyperebene enthalten ist) und Example 3.10 (der allgemeine Fall und Interpretation mit Hilfe der Projektion von der Spitze).

iv) Man vergleiche [3, Exerc. I.2.10].

5. Quadriken und Grassmannsche (Robert Mijatovic)

Grundlage für diesen Vortrag sind [2, Lectures 1,3,6].

i) Man wiederhole die Beziehung zwischen Bilinearformen und quadratischen Formen ($\mathrm{char}(K) \neq 2$ und K algebraisch abgeschlossen) (Example 3.3) und definieren Quadriken in $\mathbb{P}^n$. Einfachstes Beispiel: Quadriken in $\mathbb{P}^1$.

ii) Quadriken in $\mathbb{P}^2$ und rationale Normkurven vom Grad 2 (Example 1.20). Neuer Beweis für Theorem 1.18 (siehe auch [6, Sect. 5.2]). Das Bild auf Seite 34 für Quadriken in $\mathbb{P}^3$ ist für das Verständnis hilfreich.

iii) Definition von $G(k,n)$ als Varietät und erkläre $G(k,n) = \mathbb{G}(k-1, n-1)$. Spezialfall: $G(1,n) = \mathbb{P}^{n-1}$. Example 6.6.

iv) Plücker Gleichungen (siehe auch [6, Sect. 5.4]). Spezialfälle $G(2,V) \subset \mathbb{P}(\wedge^2 V)$ und die Quadrik $G(2,4) \subset \mathbb{P}(\wedge^2 K^4) = \mathbb{P}^5$. Example 6.2.

6. Inzidenzvarietäten (Max Fabian Schmidt)

Ausgehend von Grassmannschen Varietäten kann man weitere Varietäten konstruieren.Wir stützen uns auf [2, Lect. 6].

i) Wir beginnen erneut mit Grassmannschen und betrachten natürliche Untervarietäten. Die Schubertvarietät $\Sigma_\ell \subset \mathbb{G}(k,n)$ ist die Menge der linearen Unterräume $\Lambda \subset \mathbb{P}^n$ mit $\Lambda \cap \mathbb{P}^m$ von der Dimension $\geq \ell$. Man zeige, dass dies wirklich Untervarietäten sind (vgl. [2, S. 66]).

ii) Man definierte die Inzidenzvarietät $\Sigma \subset \mathbb{G}(k,n) \times \mathbb{P}^n$ als projektive Varietät, [2, Example 6.12].

iii) Für $X \subset \mathbb{P}^n$ hat die Menge $\mathcal{C}_k(X) \subset \mathbb{G}(k,n)$ aller $\Lambda \subset \mathbb{P}^n$ mit $X \cap \Lambda \neq \emptyset$ die Struktur einer projektiven Varietät.

iv) Fanovarietäten von Geraden $\ell \subset X \subset \mathbb{P}^n$ (oder allgemeiner von linearen Unterräumen $\Lambda \subset X$) werden benutzt um ausgehend von einer 'interessanten' Varietät X neue (noch interessantere) Varietäten $F_k(X)$ zu konstruieren. Example 6.19 in [2].

v) Man diskutiere den 'Join' $J(X,Y)$ zweier disjunkter Varietäten $X, Y \subset \mathbb{P}^n$ als Vereinigung aller Geraden, die Punkte in X und Y verbinden. Dies ist wiederum eine projektive Varietät. Dazu muss man insbesondere Prop. 6.13 beweisen. So die Zeit erlaubt, kann man auch den Fall sich schneidender Varietäten behandeln, vgl. [2, Ex. 8.1,8.2].

7. Algebraische Gruppen, Beispiele (Baran Can Öner)

Grundlage für diesen Vortrag ist [2, Lect. 10].

i) $\mathrm{GL}(n)$ als affine Varietät: Als offene Menge von $\mathbb{A}^{n^2}$ (Komplement der Hyperfläche $\det = 0$) oder als abgeschlossene Menge von $\mathbb{A}^{n^2+1}$ (definiert durch die Gleichung $\det \cdot x_{n^2+1} = 1$). Die Multiplikation is regulär. Example 10.1. Analog dazu behandle man die Gruppen $\mathrm{SL}(n)$ und $\mathrm{PGL}(n)$. Man gebe die formale Definition einer algebraischen Gruppe wie auf Seite 114.

ii) Eine algebraische Gruppe G 'wirkt' auf einer Varietät X durch einen regulären Morphismus $G \times X \longrightarrow X$ (siehe S. 116). Beispiele: Examples 10.4, 10.5, 10.6.

iii) Die Wirkung von $\mathrm{PGL}(2)$ auf $\mathbb{P}^2$ und $\mathbb{P}^3$: Examples 10.8 und 10.9.

iv) Die Wirkung von $\mathrm{PGL}(2)$ auf $\mathbb{P}^4$ und die j-Invariante (Example 10.12). Stellen Sie die Verbindung zur Vorlesung Algebra I her. Man erwähne kurz die Wirkung von $\mathrm{PGL}(2)$ auf dem Raum der Kubiken $\mathbb{P}^9$ und das erneute Auftreten der j-Invariante.

v) Man erkläre die Wirkung von $\mathrm{PGL}(n)$ auf dem (projektiven) Raum der Polynome von einem festen Grad d in n Variablen.

vi) Quotienten endlicher Gruppenwirkungen auf affinen Varietäten: Seite 124-126.

8. Nullstellensatz (Paul Görlach)

An dieser Stelle soll (längst überfällige) die Beziehung zur kommutativen Algebra und insbesondere der Nullstellensatz erklärt werden. Als Referenz bieten sich an [2, Lect. 5], [6, Sect. 2] oder auch [1, Ch. 1].

i) Für die Teilnehmer, die nicht die Vorlesung Algebra II hören muß der Begriff des Radikals eines Ideals erklärt werden, z.B. Exercises 2.1.1-2.1.6 in [6].

ii) Die Begriffe 'noetherscher Ring' und 'endliche erzeugte K-Algebren' sind aus der Vorlesung GRM bekannt. Man erinnere an den Satz, dass mit einem Ring A auch der Polynomring $A[x]$ noethersch ist. Insbesondere ist der Polynomring $K[x_1, \ldots, x_n]$ noethersch.

iii) Man formuliere den Hilbertschen Nullstellensatz, der eine Bijektion zwischen den affinen Varietäten $X \subset \mathbb{A}^n$ und den Radikalidealen in $K[x_1, \ldots, x_n]$ herstellt ([6, S. 21] und [2, Thm. 5.1]). Formulieren Sie auch den 'schwachen' Nullstellensatz ([2, Thm. 5.17]) und zeigen Sie, dass dieser die starke Form impliziert ('Rabinovitsch Trick', Seite 59). Der Beweis des schwachen Nullstellensatz wird in der Vorlesung behandelt.

iv) Man wiederhole die Aussage ([2, Lemma 2.1]), dass für eine affine Varietät X der Koordinatenring des Komplements von $V(f)$, $f \in A(X)$, die Lokalisierung $A(X)[\frac{1}{f}]$ ist. Man beweise diese nun mit Hilfe des Nullstellensatzes, siehe S. 61 in [2].

v) Definition 'irreduzibel'. Man beweise, dass eine affine Varietät $X \subset \mathbb{A}^n$ genau dann irreduzibel ist, wenn $I(X) \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ ein Primideal ist ([2, S. 52]).

9. Tangentialraum und Gauss Abbildung (Emanuel Reinecke)

Wir werden den Tangentialraum einer affinen/projektiven Varietät an einen Punkt definieren ohne allerdings auf den allgemeinen Begriff der Glattheit einzugehen. (Die dazu nötige Diskussion des Dimensionsbegriffs wird in der Vorlesung stattfinden.)

i) Man definieren den Tangentialraum als Kern des Differentials, vgl. S. 174 [2]. Man berechne einige einfache Beispiele, z.B. für die Kurve in $\mathbb{A}^2$ definiert durch $x^3 = y^2$.

ii) Der projektive Tangentialraum, S. 181 bis Exercise 14.12 [2]. Wir sagen, dass eine Hyperfläche in $X \subset \mathbb{P}^n$ gegeben als Nullstellenmenge eines homogenen Polynoms $f \in K[x_0, \ldots, x_n]$ glatt in $P \in X$ ist, falls nicht alle Ableitungen $\partial f / \partial x_i$ in P verschwinden.

iii) Man definiere die Gauß Abbildung $X \longrightarrow \mathbb{G}(k, n)$. Dabei nehmen wir an, dass alle Tangentialräume von der gleichen Dimension k sind (X is glatt), [2, Example 5.2]. Vgl. auch [6, Sect. 6.5] und insbesondere [6, Exercise 6.5.3].

iv) Die Gauß Abbildung für Hyperflächen vom Grad ≥ 2 ist endlich. Insbesondere ist das (Gauss) Bild wieder eine Hyperfläche.

v) Man beschreibe den Tangentialraum von $G(k, n)$ in $\Lambda \subset V$ as $\mathrm{Hom}(\Lambda, V/\Lambda)$, [2, Example 16.1].

vi) Analog beschreibe man den Tangentialraum an die Inzidenzvarietät (Example 16.2) und die Fahnenmannigfaltigkeit (Exericse 16.3, Example 11.40).

10. Ebene kubische Kurven (Vincent Zimmerer)

Für diesen Vortrag stützen wir uns auf [4, Ch. 4]. Ziel ist es, Hyperflächen in $\mathbb{P}^2$ (also Kurven) gegeben durch homogene Polynome $f \in K[x_0, x_1, x_2]$ vom Grad 3 zu klassifizieren. (Die Nummerierung unten bezieht sich auf die englische Ausgabe von [4], sollte aber hoffentlich mit der der deutschen übereinstimmen.)

i) Der reduzible Fall: Man formuliere Lemma 4.1 und Proposition 4.10 in [4]. Die Wirkung der Gruppe PGL(3) muss man ggf. kurz wiederholen. Mit dem einfachen Beweis von Lemma 4.1 sollte man sich nicht aufhalten, evtl. genügt hier das instruktive Bild.

ii) Schnittmultiplizität und Bézouts Satz. Man definiere $I_P(C, C')$ und berechne diese für ein Beispiel (Example 4.7). Man formuliere Bézouts Satz und beweise den Spezialfall, dass einer der Kurven eine Gerade ist. Beweis von Proposition 4.10.

iii) Der singuläre irreduzible Fall: Man formuliere Proposition 4.11. Der Beweis wird in den nächsten Vortrag verschoben.

iv) Der glatte (und besonders interessante) Fall: Man beweise, dass jede glatte Kubik projektiv äquivalent zu einer Kubik in Weierstraß Form ist (Prop. 4.23). (Dass zwei ebene Kurven sich immer schneiden, wird ohne Beweis verwendet.)

v) Diskriminante einer Kubik in Weierstraß Form und Glattheit (Prop. 4.24).

vi) Die j-Invariante und projektive Äquivalenz (Prop. 4.28).

(Wir lassen die Gruppenstruktur auf glatten kubischen Kurven und die Beschreibung als Torus aus Zeitgründen unerwähnt.)

11. Geraden auf kubischen Flächen (Benni Wassermann)

Hierbei handelt es sich um einen der bekanntesten klassischen Sätze: Eine glatte kubische Fläche $S \subset \mathbb{P}^3$ enthält genau 27 Geraden. Wir werden diesen Satz nicht vollständig beweisen, aber sehen, dass S immer eine Gerade enthält und woher die Zahl 27 kommt. Wir stützen uns auf Kapitel 5 in [4] (Nummerierung der englischen Ausgabe), welches wiederum auf [5] basiert.

i) Man beginne mit dem Satz und einem Bild bzw. Modell. (Es gibt eine Sammlung von mathematischen Modellen, Hausmeister fragen.)

ii) Der Tangentialraum an einen Punkt schneidet die Fläche S in einer singulären Kubik. Für mindestens einen Punkt ist diese Kurve sogar noch spezieller (Lemma 5.3). (Wiederum verwenden wir ohne Beweis, dass sich zwei Hyperflächen immer schneiden.) Der Beweis von Lemma 5.3 stützt sich auf den Beweis von Proposition 4.11, der hier gegeben werden soll.

iii) Kurze Wiederholung der Eigenschaft der Resultante zweier Polynome (siehe Vorlesung Algebra I) und Beweis von Theorem 5.1, dass jede glatte Kubik $S \subset \mathbb{P}^3$ eine Gerade enthält.

iv) Man erwähne Remark 5.8, welche andeutet, warum man genau 27 Geraden erwartet.

v) Man benutze die Existenz zweier disjunkter Geraden, um die Rationalität glatter Kubiken $S \subset \mathbb{P}^3$ zu zeigen (Prop. 5.17, ii)). Rationale Abblildungen werden erst später ausführlich besprochen, man konstruiere hier also einfach nur die reguläre injektive Abbildung von einer offenen Menge von $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ auf S. Man erwähne die Beziehung zu Satz von Lüroth aus der Vorlesung Algebra I.

12. Rationale Abbildungen (Florian Funke)

Rationale Abbildungen zwischen Varietäten sind reguläre Abbildungen, die aber nur auf einer offenen nichtleeren Menge definiert sind. Wir benutzen [2, Ch. 7, 18].

i) Definition des Funktionenkörpers einer irreduziblen(!) (affinen) Varietät.

ii) Diskussion des Begriffs einer rationalen Abbildung, S. 73-75. Man siehe auch [4, Sect. 1.3] für eine formalere Behandlung.

iii) Falls eine rationale Abbildung $\varphi : X \dashrightarrow Y$ dominant ist, definiert sie eine Körpererweiterung $K(Y) \subset K(X)$. Man erkläre die Begriffe 'birational', 'rational' und 'unirational' und was sie für die Funktionenkörper bedeuten.

iv) Quadriken $S \subset \mathbb{P}^3$ sind rational, Example 7.11.

v) Jede glatte Kubik $X \subset \mathbb{P}^4$ is unirational (aber nicht rational, was viel schwieriger zu beweisen ist). Man stütze sich auf [2, Example 18.19], vgl. auch [4, Thm. 5.19].

13. Aufblasungen (Eva-Maria Hols)

Aufblasungen modifizieren eine Varietät, ohne den birationalen Typ zu verändern (d.h. auf einer dichten offenen Teilmenge passiert nichts). Jede rationale Abbildung kann durch Aufblasungen zu einer regulären gemacht werden. Noch viel wichtiger ist, dass zumindest in Charakteristik null, jede Varietät durch Aufblasungen geglättet werden kann. (Das berühmte Resultat von Hironaka über die Auflösbarkeit von Singularitäten, vgl. [6], S. 106, 119.)

i) Aufblasung eines Punktes. Die verschiedenen Sichtweisen sind in [2, Example 7.17] erklärt. Vgl. S. 28-30 in [3] und S. 107-109 in [6].

ii) Ausführliche Diskussion der Aublasung der Singularität der Kurve $y^2 = x^3$ nach [3, Example I.4.9] und des zwei-dimensionalen Kegels nach [6], S. 110-112.

iii) Der allgemeiner Fall, dass Untervarietäten aufgeblasen werden, ist in [2, Example 7.18] behandelt Vgl. [6], S. 117-119.

iv) Die klassische Konstruktion für komplexe Mannigfaltigkeiten ist auf S. 83 in [2] erklärt. Da wir diese Theorie nicht voraussetzen, kann hier nur ein Eindruck gegeben werden. Auf jeden Fall sollte man aber erwähnen, dass die Faser über einem Punkt der Untervarietät genau der projektivierte Normalenraum ist.

v) Theorem 7.21 in [2] kann nur formuliert werden.

vi) Example 7.22 in [2] zeigt, wie die Abbildung $Q \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ in Example 7.11 aufgelöst werden kann. Das gibt eine explizite Bebschreibung der 'birationalen Korrespondenz' $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \leftrightarrow \mathbb{P}^2$.

14. Weitere ausgewählte Beispiele (Jakob Bongartz)

Für diesen Vortrag müßte man sich quasi blind entscheiden. Zum Abschluß des Seminars sollen noch weitere Beispiele interessanter Konstruktionen besprochen werden, wie etwa in Lecture 8 in [2] (Sekanten Varietäten, Scrolls, etc.). Welche Beispiele genau das sein soll, mache ich aber vom Verlauf des Seminars und den Interessen der Teilnehmer abhängig. Eine genaue Beschreibung dieses Vortrags wird es also erst viel später geben.

References

[1] W. Fulton *Algebraic curves.* Addison Wesley 1969.
[2] J. Harris *Algebraic geometry. A first course.* GTM 133. Springer 1992.
[3] R. Hartshorne *Algebraic geometry.* GTM 52. Springer 1977.

[4] K. Hulek *Elementare algebraische Geometrie.* Vieweg 2000.
[5] M. Reid *Undergraduate algebraic geometry.* LMS Student Texts 12. 1988.
[6] K. Smith et al *An invitation to algebraic geometry.* Springer 2000.