Dr. Benjamin Himpel
Mathematisches Institut

Seminarankündigung Sommersemester 2007

Morse-Theorie

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten sind wichtige und beliebte Objekte der Topologie und Geometrie, welche die Morse-Theorie mit Hilfe von "Höhenfunktionen" beschreibt. Durch die kritischen Punkte gewinnt man Informationen über die Topologie der Mannigfaltigkeit. Man versteht insbesondere wie man die Mannigfaltigkeit aus einfachen Teilen zusammenbauen kann.

Die Morse Theorie hat einige wichtige Anwendungen. Der erste Beweis von Bott Periodizität [10] und der Beweis der Poincaré Vermutung in Dimension 5 und höher [14, 11] basierten beispielsweise auf Morse-Theorie. Außerdem inspirierte Morse-Theorie Floer zu seiner Instanton-Homologie [4, 13, 6] und war der Ausgangspunkt für viele andere Floer Homologien [8, 9].
Das Seminar wird zur Erarbeitung der analytischen Grundlagen dem Buch von Milnor [10] folgen. Für den Beweis des Poincaré-Hopf-Satzes und der Morse-Ungleichungen ist auch der analytische Zugang durch Witten-Deformationen interessant [3, 15]. Danach werden Anwendungen im Bereich Topologie und Geometrie besprochen.

Vorgesehene Themen:

(1) Mannigfaltigkeiten und Morse-Lemma (§1,§2 von [10], siehe auch [2], [7])
(2) Homotopietyp, kritische Werte und Beispiele(§3,§4 von [10], siehe auch [5], [7])
(3) Morse Ungleichungen, Existenz von Morse-Funktionen und der Satz von Lefschetz (§5-7 von [10], siehe auch [12], [2], [7])
(4) Riemannsche Geometrie (§8-10 von [10])
(5) Energie von Pfaden und der Index Satz (§11-15 von [10])
(6) Die Topologie des Pfadraumes (§16-19 von [10])
(7) Bott Periodizität für die unitäre Gruppe (§20-23 von [10])
(8) Bott Periodizität für die orthogonale Gruppe (§24 von [10])
(9) Morse Homologie (§1,§2 von [6] und [1])
(10) Morse Homologie ist kanonisch isomorph zur Singulären Homologie (§3 von [6] und [1])
(11) Morse-Bott Theorie (§6 von [6] und [1])
(12) Cassons Invariante als Euler-Charakteristik
(13) Instanton Floer Homologie ([4], [13], [6], [1], ...)
(14) Poincaré-Hopf-Satz und Morse-Ungleichungen durch Witten Deformationen ([3, 15])

Vorkenntnisse: Grundkenntnisse in Differentialgeometrie oder Differentialtopologie.

Literatur

[1] A. Banyaga, D. Hurtubise: Lectures on Morse Homology
[2] Bröcker-Jänich: Einführung in die Differentialtopologie; Springer Verlag (BJ)
[3] K.C. Chang: Infinite dimensional Morse Theory and multiple solution problems
[4] S. Donaldson: Floer homology groups in Yang-Mills theory
[5] A. Hatcher: Algebraic Topology `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf`
[6] M. Hutchings: Lecture notes on Morse homology (with an eye towards Floer theory and pseudoholomorphic curves), `http://math.berkeley.edu/~hutching/teach/276/mfp.ps`
[7] Y. Matsumoto: An Introduction to Morse Theory
[8] D. McDuff: Floer theory and low dimensional topology, `http://www.math.sunysb.edu/~dusa/floer8.pdf`
[9] D. McDuff, D. Salamon: Introduction to Symplectic Topology
[10] J. Milnor: Morse Theory
[11] J. Milnor: Lectures on the h-coborsism theorem
[12] J. Milnor: On manifolds homotopic to the 7-sphere; Annals of Mathematics 64 (1956), pp. 399-405; `http://www.jstor.org/view/0003486x/di961753/96p0047r/0`
[13] N. Saveliev: Invariants of Homology 3-Spheres
[14] S. Smale: Generalized Poincaré conjecture in dimensions greater than four; Ann. of Math. (2) 74 (1961), 391-406
[15] W. Zhang: Lectures on Chern-Weil Theory and Witten Deformations