Benjamin Himpel, Ph.D.
Mathematisches Institut
Universität Bonn

Wintersemester 2007

Globale Analysis I
Blatt Nr. 9

Abgabe am 10.01.2007

Alle Aufgaben sind 4 Punkte wert.

Aufgabe 1. Seien $f \in C^\infty(M, N)$, $\omega \in \Omega^k(N)$ und $\eta \in \Omega^l(N)$. Dann gilt

(i) $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$, und

(ii) $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$.

Aufgabe 2 (De Rham-Kohomologie des 2-Torus.). Es sei $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

(i) Begründe, warum $H^0(\mathbb{T}^2) = \mathbb{R}$.

(ii) Es sei $\omega = \varphi(x, y)dx + \psi(x, y)dy \in \Omega^1(\mathbb{T}^2)$, d.h. φ und ψ sind $\mathbb{Z}^2$-periodisch. Es sei ω geschlossen. Zeige, dass dann die Funktionen

$$y \mapsto \int_0^1 \varphi(x', y)dx', \quad x \mapsto \int_0^1 \psi(x, y')dy'$$

konstant sind.

(iii) Es sei ω wie oben. Zeige, dass ω genau dann exakt ist, wenn

$$\int_0^1 \varphi(x', 0)dx' = 0 \text{ und } \int_0^1 \psi(0, y')dy' = 0.$$

Man folgere, dass $H^1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{R}[dx] \oplus \mathbb{R}[dy]$.

(iv) Es sei $\omega = f(x, y)dx \wedge dy$ eine 2-Form, d.h. f ist $\mathbb{Z}^2$-periodisch. Zeige, dass ω genau dann exakt ist, wenn

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)dxdy = 0.$$

Folgere, dass $H^2(\mathbb{T}^2) = \mathbb{R}[dx \wedge dy]$.

Hinweis zu (iv): Man betrachte die Form $\eta = \varphi(x, y)dx + \psi(x, y)dy$ mit

$$\varphi(x, y) = -\int_0^y \int_0^1 f(x', y')dx'dy', \quad \psi(x, y) = \int_0^x f(x', y)dx' - x\int_0^1 f(x', y)dx'.$$

Wann ist η eine glatte 1-Form auf $\mathbb{T}^2$?

Aufgabe 3. (i) Es sei (M, g) eine orientierte m-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit und $N \subset M$ eine orientierte Hyperfläche. Die Einschränkung von g auf den Tangentialraum von N liefert eine Riemannsche Metrik von N.

Es sei X das *Einheitsnormalenfeld an* N, d.h. es gelte für alle $p \in N$:

(1) $X(p) \perp T_pN$ und $\|X(p)\| = 1$.

(2) Bilden $e_1, ..., e_{n-1}$ eine orientierte Basis von T_pN, so sind $X(p), e_1, ..., e_{n-1}$ eine orientierte Basis von T_pM.

Zeige, dass für alle $p \in N$

$$\mathrm{vol}_N(p) = \mathrm{int}_{X(p)}(\mathrm{vol}_M(p)).$$

(ii) Es sei $\eta \in \Omega^n(\mathbb{R}^{n+1})$ gegeben durch

$$\eta = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} x_j \, dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^{n+1}$$

und $i\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ die natürliche Einbettung. Folgere aus (i), dass $i^*\eta \in \Omega^n(S^n)$ das orientierte Volumenelement der n-Sphäre ist.

Aufgabe 4 (Poincaré-Lemma für de Rham-Kohomologie mit kompaktem Träger). Es sei $\Omega_0(M) := \big\{\omega \in \Omega(M) \;\big|\; \operatorname{supp}\omega \text{ kompakt}\big\}$ für eine glatte Mannigfaltigkeit M. Offenbar gilt $d(\Omega_0^p(M)) \subset \Omega_0^{p+1}(M)$. Wir setzen

$$H_c^k(M) := \big(\ker d\colon \Omega_0^k(M) \to \Omega_0^{k+1}(M)\big) / \big(\operatorname{im} d\colon \Omega_0^{k-1}(M) \to \Omega_0^k(M)\big).$$

Man beachte, dass jede Form $\omega \in \Omega_0(M \times \mathbb{R})$ von der Form

$$\omega = \omega_1(t) + \omega_2(t) \wedge dt$$

ist, wobei $\omega_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \Omega_0(M))$. Es sei $\eta \in \Omega_0^1(\mathbb{R})$ mit $\int\limits_{\mathbb{R}} \eta = 1$. Setze:

(a) $p_*\colon \Omega_0^p(M \times \mathbb{R}) \to \Omega_0^{p-1}(M)$, $p_*\omega := \int\limits_{\mathbb{R}} \omega_2(s) ds$, “Integration entlang der Faser”.

(b) $e_*\colon \Omega_0^{p-1}(M) \to \Omega_0^p(M \times \mathbb{R})$, $e_*\omega := \omega \wedge \eta = \eta_1(t) \cdot \omega \wedge dt$.

(c) $K\colon \Omega_0^p(M \times \mathbb{R}) \to \Omega_0^{p-1}(M \times \mathbb{R})$, $K\omega := (-1)^p \Big(\int\limits_{-\infty}^{t} \omega_2(s) ds - \int\limits_{\mathbb{R}} \omega_2(s) ds \cdot \int\limits_{-\infty}^{t} \eta \Big)$.

Man zeige:

(i) $H_c^k(M)$ ist eine Diffeomorphie-Invariante und $H_c^k(\mathbb{R}) = \begin{cases} 0, & k = 0, \\ \mathbb{R}, & k = 1. \end{cases}$

(ii) $d\omega = d\omega_1(t) + \big((-1)^p \frac{\partial \omega_1}{\partial t}(t) + d\omega_2(t)\big) \wedge dt$.

(iii) $p_*\colon \Omega_0(M \times \mathbb{R}) \to \Omega_0(M)$ ist ein Komplexhomomorphismus vom Grad -1.

(iv) $e_*\colon \Omega_0(M) \to \Omega_0(M \times \mathbb{R})$ ist ein Komplexhomomorphismus vom Grad $+1$.

(v) $e_* \circ p_* - \mathrm{Id} \;=\; d \circ K + K \circ d, \quad p_* \circ e_* = \mathrm{Id}$.

(vi) Folgere, dass p_* einen Isomorphismus

$$H(p_*)\colon H_c^k(M \times \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H_c^{k-1}(M)$$

induziert. Mit (i) gilt insbesondere $H_c^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ \mathbb{R}, & k = n. \end{cases}$

Aufgabe 5. Beweise das Schlangenlemma.