Benjamin Himpel, Ph.D.
Mathematisches Institut
Universität Bonn

Wintersemester 2007/2008

Globale Analysis I
Blatt Nr. 13

Abgabe am 05.02.2008

Alle Aufgaben sind 4 Punkte wert.

Aufgabe 1. Beweise mit Hilfe des Morse-Lemmas (siehe z.B. Milnor: Morse-Theory), dass für eine Morse-Funktion $f\colon M \to \mathbb{R}$ und einen nicht-entarteten kritischen Punkt p von f gilt

$$\operatorname{ind}(\operatorname{grad}_p(f)) = (-1)^{\operatorname{ind}(\operatorname{Hess}_p(f))}.$$

Aufgabe 2. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ Multiindizes. Wir setzen $\beta \leq \alpha$, falls $\beta_i \leq \alpha_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Definiere $\alpha! := \alpha_1! \cdot \ldots \cdot \alpha_n!$ und $\binom{\alpha}{\beta} := \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$ für $\beta \leq \alpha$. Zeige

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} (D^\beta f)(D^{\alpha-\beta} g).$$

Aufgabe 3. Zeige:

(i) Für $\Omega^0(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist $\Delta = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

(ii) $*\Delta = \Delta *$.

Aufgabe 4. Sei M eine geschlossene Mannigfaltigkeit. Zeige, dass die nicht-entartete Bilinearform

$$\langle \alpha, \beta \rangle := \int_M \alpha \wedge *\beta, \quad \alpha, \beta \in \Omega^p(M)$$

symmetrisch und positiv definit ist.