

## Probeklausur zur Analysis III (WS 2009/2010)

**Aufgabe 1.** Nur *wahr* oder *falsch* oder Enthaltungen sind mögliche Ergebnisse (es sind je Aufgabenteil  $\pm 2$  P., insgesamt mindestens 0 P. und höchstens 14 P. erreichbar)

- Jede stetige und beschränkte Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist integrierbar.
- Die Menge  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$  ist eine Nullmenge.
- Es sei  $X$  eine Menge,  $\mathcal{A}$  eine Mengenalgebra über  $X$  und  $\mu$  ein positives Maß auf  $\mathcal{A}$ . Weiterhin gebe es Mengen  $A_k \in \mathcal{A}$  mit  $\mu(A_k) < \infty$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $X = \cup_{k=0}^{\infty} A_k$ . Dann gibt es genau eine Fortsetzung von  $\mu$  zu einem Maß auf der von  $\mathcal{A}$  erzeugten  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{A}_\sigma$ .
- Es sei  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Folge integrierbarer Funktionen, so dass  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$  für alle  $x \in [0, 1]$ . Dann gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0$ .
- Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch  $f(x) = 1/\sqrt{x}$  für  $x > 0$  sowie  $f(x) = 0$  für  $x \leq 0$  ist integrierbar.
- Jede in  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$  konvergente Folge  $(f_n)$  integrierbarer Funktionen  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert auch punktweise fast überall.
- Jede abgeschlossene Menge ist messbar.

**Aufgabe 2.** (8 P.)

Beweisen oder widerlegen Sie: Die Menge  $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$  ist eine Nullmenge in  $\mathbb{R}^2$ .

**Aufgabe 3.** (4 P.)

Formulieren Sie den Satz über die Transformationsformel für Integrale im  $\mathbb{R}^n$ .

**Aufgabe 4.** (8 P.)

Berechnen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2+2xy-3y^2} d\lambda(x, y).$$

**Aufgabe 5.** (12 P.)

Es sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$  messbar. Beweisen Sie, dass

$$\mu(A) = \int_A f(x) d\lambda(x)$$

ein Maß auf der Lebesgueschen  $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$  definiert.

**Aufgabe 6.** (10 P.)

Berechnen Sie

$$\int_0^1 \int_x^1 y^2 \sin \frac{2\pi x}{y} dy dx$$

mit Hilfe des Satzes von Fubini zur Vertauschung der Integrationsreihenfolge.

**Aufgabe 7.** (12 P.)

- a) Zeigen Sie, dass für  $s > 1$  und  $n \in \mathbb{N}$  die Funktion  $f_n(t) = t^{s-1}e^{-nt}\chi_{(0,\infty)}(t)$  integrierbar ist und zeigen Sie

$$\Gamma(s) = n^s \int_{\mathbb{R}} f_n(t) dt.$$

- b) Zeigen Sie für  $s > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt.$$

**Aufgabe 8.** (10 P.)

Berechnen Sie das Volumen der Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq e^z, z \leq 0\}.$$

**Aufgabe 9.** (12 P.)

Berechnen Sie das Oberflächenmaß der Fläche

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = xy\}.$$

**Aufgabe 10.** (10 P.)

- a) Formulieren Sie den Integralsatz von Gauß.
- b) Es sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes  $C^1$ -Polyeder und  $\nu : \partial_r G \rightarrow \mathbb{R}^2$  das stetige äußere Einheitsnormalenvektorfeld. Es sei weiterhin  $t(x) = (-\nu_2(x), \nu_1(x))$ , also das um  $+\pi/2$  gedrehte Vektorfeld. Zeigen Sie die Flächenformeln

$$\lambda(G) = \int_{\partial G} x_1 t_2(x) dS(x) = - \int_{\partial G} x_2 t_1(x) dS(x).$$