Prof. Dr. Werner Müller
Dr. Sebastian Herr

Nachklausur zur Analysis III (29.03.2010)

Aufgabe 1. Nur *wahr* oder *falsch* oder Enthaltungen sind mögliche Ergebnisse (es sind je Aufgabenteil $\pm$ 2 P., insgesamt mindestens 0 P. und höchstens 10 P. erreichbar)

a) Jede Nullmenge $N \subset \mathbb{R}$ ist abzählbar.

b) Es existiert eine unbeschränkte Funktion $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

c) Es sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f\|_1 = 0$. Dann ist $f(x) = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$.

d) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ist $|f|$ messbar, so ist auch f messbar.

e) Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ offen und Lebesgue-Nullmenge, so ist $M = \emptyset$.

Aufgabe 2. (4 P.)
Formulieren Sie den Satz über die Transformationsformel.

Aufgabe 3. (4 P.)
Formulieren Sie den Satz von Gauß.

Aufgabe 4. (10 P.)
Beweisen oder widerlegen Sie: Die Funktion

$$f : (0,1) \times (0,1) \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{4}}}$$

ist integrierbar.

Aufgabe 5. (14 P.)
Seien $a, b > 0$ und $E(a,b) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$.

a) Zeigen Sie

$$\int_{E(a,b)} |xy| d\lambda^2(x,y) = a^2 b^2 \int_{E(1,1)} |xy| d\lambda^2(x,y).$$

b) Berechnen Sie mit Hilfe von a)

$$\int_{E(a,b)} |xy| d\lambda^2(x,y).$$

Aufgabe 6. (10 P.)
Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{e^{\frac{x}{y}}}{y} dy\, dx$$

mit Hilfe des Satzes von Fubini/Tonelli zur Vertauschung der Integrationsreihenfolge.

– bitte wenden –

Aufgabe 7. (12 P.)

a) Zeigen Sie, dass für jede stetig differenzierbare Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\cos(2\pi n x)dx = 0.$$

b) Beweisen oder widerlegen Sie: Die Funktionen $c_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $c_n(x) := \cos(2\pi n x)$ bilden eine Nullfolge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^1([0,1])$.

Aufgabe 8. (14 P.) Wir betrachten die Γ-Funktion $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$, für $x > 0$.

a) Zeigen Sie durch Anwendung der Transformationsformel mit $t = x + xs\sqrt{\frac{2}{x}}$, dass

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2x}} = \int_{\mathbb{R}} \left(1 + \frac{s}{y}\right)^{2y^2} e^{-2sy}\chi_{(-y,\infty)}(s)ds, \qquad \text{wobei } y = \sqrt{\frac{x}{2}} > 0.$$

b) Zeigen Sie die Stirlingsche Formel

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\Gamma(x+1)}{\left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2x}} = \sqrt{\pi}.$$

Benutzen Sie hierzu Teil a) und die als bekannt vorausgesetzten Aussagen

$$\text{Für alle } s \in \mathbb{R} : \lim_{y\to\infty} \left(1 + \frac{s}{y}\right)^{2y^2} e^{-2sy} = e^{-s^2},$$

$$\text{Für alle } s \in \mathbb{R}, y \geq 1 : \left(1 + \frac{s}{y}\right)^{2y^2} e^{-2sy} \leq \begin{cases} (1+s)^2 e^{-s} & \text{für } s \geq 0, \\ e^{-s^2} & \text{für } -y < s < 0. \end{cases}$$

Aufgabe 9. (12 P.)
Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der Fläche

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in (0,1), y \in (0,3), z = \sqrt{9 - y^2}\}.$$

Erinnerung: $\arcsin'(s) = (1-s^2)^{-1/2}$, $|s| < 1$.

Aufgabe 10. (10 P.)
Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ und G das von den Koordinatenachsen und dem Graphen von f eingeschlossene Gebiet in $\mathbb{R}^2$. Es bezeichne ν das stetige äußere Einheitsnormalenvektorfeld auf $\partial_r G$ und

$$F(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1^2 + 3x_2^2 + x_2 \\ 6x_1x_2 + 5x_1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial_r G} \langle F(y), \nu(y)\rangle dS$$

durch Anwendung des Integralsatzes von Gauß.