Prof. Dr. Werner Müller
Dr. Sebastian Herr

Klausur zur Analysis III (08.02.2010)

Aufgabe 1. Nur *wahr* oder *falsch* oder Enthaltungen sind mögliche Ergebnisse (es sind je Aufgabenteil ± 2 P., insgesamt mindestens 0 P. und höchstens 10 P. erreichbar)

a) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $M_k \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Menge. Dann ist die Vereinigung $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} M_k \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar.

b) Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Borel-Menge und $n \geq 2$. Für alle $\alpha > 0$ gilt dann $\lambda(\alpha A) = \alpha\lambda(A)$.

c) Es sei (f_n) eine Folge integrierbarer Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, welche gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f integrierbar und es gilt $\|f_n - f\|_1 \to 0$ $(n \to \infty)$.

d) Die Menge $\{e^t(\cos t, \sin t) : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ eine Lebesgue-Nullmenge.

e) Es seien $(X, \mathcal{A}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ Maßräume und $Q \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Dann gilt $Q_x \in \mathcal{B}$ für alle $x \in X$.

Aufgabe 2. (10 P.)
Beweisen oder widerlegen Sie: Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|^n \log^2(|x|)} & \text{falls } |x| > 2, \\ 0 & \text{falls } |x| \leq 2. \end{cases}$$

integrierbar.

Aufgabe 3. (4 P.)
Formulieren Sie den Satz von Lebesgue über die dominante Konvergenz.

Aufgabe 4. (10 P.)
Beweisen Sie, dass die Funktion $B : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$B(t,x) = t^{-\frac{n}{2}} e^{-t-\frac{|x|^2}{4t}}$$

integrierbar ist und bestimmen Sie das Integral $\int_{(0,\infty)\times\mathbb{R}^n} B(t,x) d\lambda(t,x)$.

Aufgabe 5. (12 P.)

a) Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : X \to [0,\infty)$ sei integrierbar. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$f_n(x) := n \log(1 + f(x)/n)$$

nichtnegativ und integrierbar ist.

b) Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) d\mu(x) = \int_X f(x) d\mu(x).$$

Sie können $\log(1+x) \leq x$ sowie $(1 + x/n)^n \to e^x$ für $n \to \infty$ und $x \geq 0$ als bekannt voraussetzen.

Aufgabe 6. (10 P.)
Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(y)}{y} dy\, dx$$

mit Hilfe des Satzes von Fubini zur Vertauschung der Integrationsreihenfolge.

Aufgabe 7. (10 P.)
Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in (0,1)$

$$f_n(x) = n\chi_{[2^{-n},2^{1-n})}(x).$$

Zeigen Sie, dass $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ eine integrierbare Funktion $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ definiert.

Aufgabe 8. (14 P.)

a) Es sei $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x + y < 1\}$. Zeigen Sie, dass die Abbildungsvorschrift

$$\phi(u,v) = (u(1-v), uv)$$

einen C^1-Diffeomorphismus $\phi : (0,1)^2 \to S$ definiert.

b) Es sei $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, x + y < 1\}$. Bestimmen Sie

$$\int_S \frac{1}{\sqrt{x+y}} d\lambda(x,y).$$

Aufgabe 9. (10 P.)
Berechnen Sie das Oberflächenmaß von

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 4, z = x^2 - y^2\}.$$

Aufgabe 10. (10 P.) Es bezeichne $B_1(0) = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\partial B_1(0)} \langle F(y), y \rangle \, dS$$

für das Vektorfeld

$$F(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1^3 - x_2^2 \\ x_2^3 - x_1 \end{pmatrix}$$

durch Anwendung des Integralsatzes von Gauß.