Prof. Dr. Werner Müller
Dr. Sebastian Herr

Zusatzblatt zur Analysis III (WS 2009/2010)

Abgabe am 07.01.2010 in der Vorlesungspause.

Die Abgabe ist optional: Die hier erreichten Punkte werden zu Ihrem Punktestand im Rahmen der Klausurzulassung hinzuaddiert.

Aufgabe I. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und

$$I_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} d\lambda(x).$$

a) Zeigen Sie $I_n = (I_1)^n$.

b) Leiten Sie mit Hilfe der Ergebnisse des Übungsblatts 9 eine explizite Formel für I_n und das Volumen der Einheitskugel ω_n, getrennt für gerades und ungerades n, her.

Aufgabe II. Es sei $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $G(x) = (4\pi)^{-\frac{n}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{4}}$, und $G_s(x) := s^{-n} G(x/s)$ für $s > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

a) Zeigen Sie, dass G_s integrierbar ist mit $\int_{\mathbb{R}^n} G_s(x) d\lambda(x) = 1$.

b) Für stetige und beschränkte Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiere

$$u : (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad u(t,x) := \int_{\mathbb{R}^n} G_{\sqrt{t}}(x-y) f(y) dy.$$

Zeigen Sie, dass für alle $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\partial_t u(t,x) = \sum_{j=1}^{n} \partial^2_{x_j x_j} u(t,x).$$

c) Bestimmen Sie für $x \in \mathbb{R}^n$ den Grenzwert $\lim_{t \to 0+} u(t,x)$. Ist die Konvergenz gleichmäßig?

Aufgabe III. Beweisen Sie für $x > 0$ die Darstellung

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

durch Anwendung des Satzes über majorisierte Konvergenz auf die Folge

$$f_n(t) := t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \chi_{(0,n)}(t).$$

Aufgabe IV.

a) Untersuchen Sie folgende Funktionenfolgen auf punktweise Konvergenz in $\mathbb{R}$ und bestimmen Sie die Grenzfunktion:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \sin^n(x) \chi_{[0,\pi]}(x) \\ g_n(x) &= \frac{1}{1+n^2x^2} \\ h_n(x) &= \log(x + \frac{1}{n}) \chi_{(0,1)}(x) \end{aligned}$$

b) Untersuchen Sie die Folgen $\|f_n\|_1, \|g_n\|_1, \|h_n\|_1$ (siehe a)) auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.