

## 9. Übungsblatt zur Analysis III (WS 2009/2010) Abgabe am 17.12.2009 in der Vorlesungspause

### Aufgabe 33.

a) Zeigen Sie, dass für  $x > 0$  die Funktion  $\gamma_x(t) = t^{x-1}e^{-t}$  auf  $(0, \infty)$  integrierbar ist.

b) Betrachten Sie für  $x > 0$

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t} dt.$$

Beweisen oder widerlegen Sie:  $\Gamma$  ist differenzierbar.

c) Zeigen Sie mittels partieller Integration, dass

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad (x > 0); \quad \Gamma(1) = 1,$$

und schließen Sie  $\Gamma(n+1) = n!$  für  $n \in \mathbb{N}$ .

### Aufgabe 34.

a) Betrachten Sie die Hilfsfunktion

$$F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+y^2)x^2}}{1+y^2} dy \quad (x \in \mathbb{R})$$

und beweisen Sie, dass  $F$  differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung  $F'$ .

b) Betrachten Sie die Hilfsfunktion

$$G(x) = \left( \int_0^x e^{-u^2} du \right)^2$$

und beweisen Sie, dass  $G$  differenzierbar ist mit  $(G + F)' = 0$ .

c) Folgern Sie hieraus, dass  $F + G$  konstant ist, und bestimmen Sie

$$I_1 := \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} d\lambda(x).$$

d) Bestimmen Sie  $\Gamma(\frac{1}{2})$ .

### Aufgabe 35.

a) Es sei  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  nichtnegativ. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$F : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(s) = \lambda(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > s\}),$$

eine Regel-Funktion ist (vgl. Analysis I).

b) Sei  $t$  eine nichtnegative Treppenfunktion. Zeigen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^n} t(x) d\lambda(x) = \int_0^\infty \lambda(\{x \in \mathbb{R}^n : t(x) > s\}) ds.$$

c) Zeigen Sie mit Hilfe monotoner Approximation durch Treppenfunktionen, dass für nichtnegatives  $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  die Funktion  $F$  uneigentlich Regel-integrierbar ist mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) d\lambda(x) = \int_0^\infty \lambda(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > s\}) ds.$$

**Aufgabe 36.** Es bezeichne  $\omega_n = \lambda(B_1(0))$  das Maß der Einheitskugel im  $\mathbb{R}^n$ . Zeigen Sie mit Hilfe der Aufgabe 35, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} d\lambda(x) = \omega_n \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right).$$