Prof. Dr. Werner Müller
Dr. Sebastian Herr

13. Übungsblatt zur Analysis III (WS 2009/2010)

Aufgabe 49. Bestimmen Sie die Oberfläche des Kegelmantels

$$K = \{(x', y) \in \mathbb{R}^n : |x'| + y = 1,\, 0 < y < 1\}.$$

Aufgabe 50. Verifizieren Sie die Aussage des Gaußschen Integralsatzes durch explizite Berechnung beider Seiten für die Pyramide

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \max\{|x|, |y|\} \leq 1 - z,\, 0 \leq z \leq 1\}$$

und das Vektorfeld $F(x, y, z) = (x^4, z^3, y^2)$.

Aufgabe 51. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $u : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und harmonisch, d.h. es gelte $\Delta u = 0$ in U. Beweisen Sie mit Hilfe der Greenschen Integralformeln, dass

$$u(x) = \frac{1}{S(\partial B(x,r))} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y) = \frac{1}{\lambda(B(x,r))} \int_{B(x,r)} u(y) d\lambda(y)$$

für jede Kugel $B(x, r) \subset U$ gilt.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst durch Ableiten, dass für gegebenes x die Funktion

$$r \mapsto \frac{1}{S(\partial B(x,r))} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dS(y)$$

konstant ist und betrachten dann den Grenzwert $r \to 0$.

Aufgabe 52. Es sei $H_r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $H_r(x) = \frac{1}{r}\chi_{[0,r]}(x)$ für $r > 0$. Zeigen Sie:

a) Für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ist

$$(H_r * f)(x) := \int_{\mathbb{R}} H_r(x - y) f(y) d\lambda(y)$$

eine stetige Funktion.

b) Sei $k \geq 1$. Ist f eine k-mal stetig differenzierbare Funktion, so ist $(H_r * f)$ eine $k + 1$-mal stetig differenzierbare Funktion.

c) Seien $r_0, \ldots, r_k > 0$. Die Funktion $H_{r_0} * \cdots * H_{r_k}$ ist $k - 1$-mal stetig differenzierbar. Fertigen Sie außerdem eine Skizze von H_1, $H_1 * H_1$ und $H_1 * H_1 * H_1$ an.