

1. Übungsblatt zur Analysis III (WS 2009/2010) Abgabe am 22.10.2009 in der Vorlesungspause

Aufgabe 1. Für ein Mengensystem $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(X)$ auf einer Menge X bezeichne \mathcal{C}_σ den Durchschnitt aller σ -Algebren, welche \mathcal{C} enthalten. Seien nun zwei nichtleere Mengensysteme $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ auf der Menge X gegeben mit den Eigenschaften $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_\sigma$ und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_\sigma$. Zeigen Sie $\mathcal{A}_\sigma = \mathcal{B}_\sigma$.

Aufgabe 2. Die Cantor-Menge C wird konstruiert, indem man ausgehend vom Intervall $C_0 = [0, 1]$ sukzessive die offenen mittleren Drittel entfernt und diesen Prozess unendlich oft wiederholt: Im ersten Schritt erhält man $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, im zweiten Schritt $C_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ usw. und die verbleibenden Punkte bilden $C = \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$.

a) Man zeige, dass C_k rekursiv durch

$$C_0 = [0, 1], C_{k+1} := C_k^- \cup C_k^+ \text{ mit } C_k^- := \frac{1}{3}C_k, C_k^+ := C_k^- + \frac{2}{3}$$

gegeben ist.

b) Zeigen Sie: $x \in C$ genau dann, wenn eine triadische Entwicklung

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \text{ mit } a_k \in \{0, 2\} \quad (*)$$

existiert.

c) Für $x \in C$ ist die triadische Entwicklung (*) eindeutig.

d) Folgern Sie, dass C überabzählbar ist.

Hinweis: Die Existenz triadischer Entwicklungen für $x \in [0, 1]$ sei als bekannt vorausgesetzt.

Aufgabe 3. Der äußere Jordan'sche Inhalt $J_*(E)$ einer Menge $E \subset \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$J_*(E) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^N |I_j| : E \subset \bigcup_{j=1}^N I_j \text{ für abgeschlossene Intervalle } I_1, \dots, I_N \right\}.$$

a) Zeigen Sie: Für alle $E \subset \mathbb{R}$ gilt $J_*(\overline{E}) = J_*(E)$.

b) Bestimmen Sie eine abzählbare Menge E mit $J_*(E) = 1$.

c) Berechnen Sie $J_*(C)$ für die Cantor-Menge C .

Aufgabe 4. Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Funktion $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt *halbstetig von oben*, wenn für jedes $x_0 \in X$ und für jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Umgebung U von x_0 existiert, so dass

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon \text{ für alle } x \in U$$

gilt. Beweisen Sie: Wenn eine Funktion halbstetig von oben ist, so ist sie Borel-meßbar.