Kapitel IV

Anwendungen auf spezielle Gruppen

4.0 Einleitung:In diesem Kapitel will ich die allgemeinen Sätze aus dem vorangehenden Kapitel auf spezielle Gruppen anwenden. Dabei werde ich insbesondere die Gruppen $Sl_2/\mathbb{Q}$ und $R_{F/\mathbb{Q}}(Sl_2/F)/\mathbb{Q}$ mit imaginär quadratischem F betrachten. Eins unserer Ziele ist, die Resultate spezifischer zu machen, es sollen aber auch die Beweise für einige der allgemeinen Tatsachen, die in Kapitel III nicht bewiesen wurden, in speziellen Fällen nachgeholt werden. Diese werden dann so geführt, daß die Ideen und Methoden, die für die allgemeinen Resultate benötigt werden, sichtbar werden. Die Beweise im allgemeinen Fall setzen die Kenntnis der Theorie der reduktiven Gruppen und der Reduktionstheorie voraus.

4.1 **Darstellungstheorie für** $Sl_2(\mathbb{R})$: In diesem Abschnitt sei die zu Grunde liegende Gruppe $G_\infty = Sl_2(\mathbb{R})$, und

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{s}l_2(\mathbb{R})$$

ist dann die zugehörige Liesche Algebra. Wir fixieren die maximal kompakte Untergruppe

$$K = \left\{ e(\phi) \mid e(\phi) = \begin{pmatrix} cos(\phi) & sin(\phi) \\ -sin(\phi) & cos(\phi) \end{pmatrix} \right\},$$

deren Liesche Algebra wir $\mathfrak{k}$ nennen. Wir setzen noch

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, E_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dann ist $\mathfrak{k} = \mathbb{R}Y$. Die Cartansche Zerlegung von $\mathfrak{g}$ sieht so aus

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p} = \mathbb{R}Y \oplus \mathbb{R}H \oplus \mathbb{R}V.$$

Wir haben schon die Projektion (siehe ....)

$$\pi : G_\infty \longrightarrow \mathbb{H}$$

betrachtet. Es wird g auf g_i abgebildet.

Wenn wir $\mathfrak{g}$ mit dem Tangentialraum an G_∞ an der Stelle e identifizieren, dann induziert die Ableitung dieser Projektion einen Isomorphismus

$$D_{\pi,e} : Y \longrightarrow T_{\mathbb{H},i},$$

wobei $T_{P\mathbb{H},i}$ der Tangentialraum an $\mathbb{H}$ an der Stelle i ist. Unter diesem Isomorphismus geht H in den Tangentialvektor $2\frac{\partial}{\partial y}$ und V in den Tangentialvektor $2 \cdot \frac{\partial}{\partial x}$ über. Jetzt ist $\mathbb{H}$ als offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ eine komplexe Mannigfaltigkeit, der Tangentialraum hat eine komplexe Struktur, die durch

$$I : \frac{\partial}{\partial x} \longmapsto \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad I : \frac{\partial}{\partial y} \longrightarrow -\frac{\partial}{\partial x}$$

gegeben ist. Wir haben dann in $T_{\mathbb{H},i} \otimes \mathbb{C}$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} - i \otimes \frac{\partial}{\partial y} \left(\text{bzw. } \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial x} + i \otimes \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

auf denen I mit den Eigenwerten i (bzw. $-i$) operiert. Die Gruppe K hat i als Fixpunkt und operiert auf dem Tangentialraum $T_{\mathbb{H},i}$ jetzt als $\mathbb{C}$-Vektorraum aufgefaßt durch den Charakter $e(\varphi) \mapsto e^{2i\varphi}$. Die komplexe Struktur wird also durch $I = e\left(\frac{\pi i}{4}\right)$ gegeben.

Bezüglich dieser Basis hat der Casimirsche Operator die Gestalt

$$4C = -Y^2 + H^2 + V^2.$$

Es ist in diesem Abschnitt nicht so wichtig zu wissen, daß unsere Gruppe G_∞ die Gruppe der reellen Punkte der Gruppe $Sl_2/\mathbb{Q}$ ist, man könnte also den Index ∞ auch weglassen, ich habe mich aber entschieden, bei dieser Notation zu bleiben.

Mit $T/\mathbb{Q}, B/\mathbb{Q}, U/\mathbb{Q}$ bezeichnen wir den Standardtorus, die Standardborelunter-gruppe und ihr unipotentes Radikal. Es ist also

$$T/\mathbb{Q} = \left\{ \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}, B/\mathbb{Q} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}, U/\mathbb{Q} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Mit $T_\infty, B_\infty, U_\infty$ bezeichnen wir dann wieder die Gruppen der reellen Punkte dieser Gruppen.

4.1.1 *Die Matrixkoeffizienten unitärer Darstellungen*: Es sei nun

$$\rho : G_\infty \longrightarrow Aut(\mathcal{H})$$

eine irreduzible unitäre Darstellung von G_∞. Das Skalarprodukt auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$ bezeichnen wir mit $< v, w >$. Für solche Darstellungen haben wir in 3.7.11 einen allgemeinen Satz von Harish-Chandra formuliert, den wir jetzt für diesen speziellen Fall beweisen wollen. Wir werden diesen Satz allerdings erst am Ende dieses Abschnitts aus viel präzieren Ergebnissen erhalten, die folgenden Überlegungen werden uns nur die Endlichkeit der K-Typen in $\mathcal{H}$ liefern oder anders gesagt, wir werden sehen, daß der Raum $\mathcal{H}^{(K)}$ der K- endlichen Vektoren ein Harish-Chandra Modul ist (Siehe (3.7.11.1)).

Zunächst haben wir schon in 3.7.11 angedeutet, daß die Aussage a) dieses Satzes aus der Spektraltheorie der unbeschränkten Operatoren folgt. Wir wissen also, daß der Casimir Operator durch einen Skalar auf dem Raum $\mathcal{H}_\infty$ operiert, wir schreiben

$$Ch = \lambda h$$

für alle $h \in \mathcal{H}_\infty$. Wir zerlegen nun den Raum $\mathcal{H}$ nach $K-$Typen. In diesem Fall sind die irreduziblen Darstellungen der Gruppe K einfach zu beschreiben. Sie sind alle von der Dimension 1 und von der Form

$$e(\phi) \longrightarrow e^{in\phi},$$

sie sind also durch die Elemente aus $\mathbb{Z}$ parametrisiert und wir erhalten in der offensichtlichen Notation

$$\mathcal{H} = \overline{\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_n}.$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß $\dim(\mathcal{H}_n) < \infty$. Da $\mathcal{H}_\infty$ in $\mathcal{H}$ dicht liegt, folgt sofort, daß auch $\mathcal{H}_{\infty,n}$ in $\mathcal{H}_n$ dicht liegt, wir haben also zu zeigen, daß $\dim(\mathcal{H}_{\infty,n}) < \infty$. Wir wählen ein orthonormales System von Vektoren $v_1, v_2, \dots, v_N$ in $\mathcal{H}_{\infty,n}$.

Lemma 1:*Die Matrixkoeffizienten*

$$c_{i,j}(g) =< gv_i, v_j > \text{ für } \quad i,j = 1,2\dots,N$$

erzeugen einen Vektorraum $\mathcal{T}$ von $\mathcal{C}_\infty$ Funktionen auf G_∞, dessen Dimension mindestens N ist.

Beweis: Wir zeigen, daß schon die Koeffizienten $c_{1,j}(g)$ linear unabhängig sind. Es sei

$$\sum_j a_j c_{1,j}(g) = 0.$$

Dann ist $\sum_j a_j c_{1,j}(g) = \sum_j < gv_1, v_j >=< gv_1, \sum \bar{a}_j v_j >= 0$. Also ist für alle g der Vektor gv_1 senkrecht auf $\sum_j \bar{a}_j$ und daher erzeugen die gv_1 einem echten invarianten Teilraum, es sei denn wir haben $\sum \bar{a}_j v_j = 0$. das kann aber nur dann gelten, wenn alle $a_j = 0$ und die Behauptung folgt.

Wir bemerken nun, daß für jedes $X \in \mathfrak{g}$ gilt

$$X < gv_i, v_j >=< Xgv_i, v_j >,$$

und das impliziert dann die Differentialgleichung

$$Cc_{i,j} = \lambda c_{i,j}. \tag{1}$$

(Man muß noch bedenken, daß die Killingform, die ja den Casimirschen Operator liefert, symmetrisch ist). Um diese Differentialgleichung zu untersuchen, führen wir Koordinaten auf der Gruppe G_∞ ein. Es sei

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}^*_{>0} \right\}.$$

Wir setzen

$$h(t) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}$$

und definieren dann

$$A_- = \{h(t) \mid 0 < t \leq 1\}$$

und

$$A_-^{\leq 1} = \{h(t) \mid 0 < t < 1\}.$$

Dann haben wir die sogenannte Cartansche Zerlegung, das ist die Abbildung

$$J : K \times A_- \times K \longrightarrow G_\infty.$$

Von dieser Abbildung weiß man, daß sie surjektiv ist. Wenn man sie auf die offene Teilmenge $K \times A_{-}^{\leq 1} \times K$ einschränkt, dann wird J lokal ein Diffeomorphismus, und die Abbildung J ist auf dieser Menge eine zweiblättrige Überlagerung von $G_\infty \backslash K$. Man überzeugt sich vielleicht am einfachsten von der Gültigkeit der Cartan-zerlegung, indem man die Operation von G_∞ auf der oberen Halbebene betrachtet (Siehe II,2.3.4).

Wir betrachten jetzt die Funktionen

$$\tilde{c}_{i,j} = c_{i,j} \circ J$$

und wir werden weiter unten durch eine etwas längere Rechnung zeigen, daß die Gleichung (1) die folgende Differentialgleichung für diese Funktionen liefert

Lemma 2: *In diesen Koordinaten besagt die Gleichung(1)*

$$\left(\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - 2\tfrac{t^2+t^{-2}}{t^2-t^{-2}}t\frac{\partial}{\partial t} + \tfrac{4}{(t^2-t^{-2})^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\phi_2^2}\right) - \tfrac{4\left(t^2+t^{-2}\right)}{(t^2-t^{-2})^2}\frac{\partial}{\partial\phi_1}\frac{\partial}{\partial\phi_2}\right)$$
$$\tilde{c}_{i,j} = 4\lambda\tilde{c}_{i,j}.$$

Jetzt ist es technisch ganz günstig eine, kleine Substitution auszuführen, wir setzen $t^2 = z$. Dann erhalten wir in dieser Variablen für den Casimirschen Operator die Formel

$$C = \left(z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 - \frac{1+z^2}{1-z^2}z\frac{\partial}{\partial z} + \frac{z^2}{(1-z^2)^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial\phi_2^2}\right) - \frac{z\left(1+z^2\right)}{\left(1-z^2\right)^2}\frac{\partial}{\partial\phi_1}\frac{\partial}{\partial\phi_2}.$$

Nun ist aber klar, daß

$$\tilde{c}_{i,j}(\phi_1, t, \phi_2) = e^{2\pi in(\phi_1+\phi_2)}\tilde{c}_{i,j}(0, t, 0),$$

wir haben eine Separation der Variablen und müssen nur noch das Verhalten in der Variablen t untersuchen. Wenn wir $z = t^2$ substituieren und $f_{i,j}(z) = \tilde{c}_{i,j}(0, z^2, 0)$ setzen, dann erhalten wir die Differentialgleichung

$$\left(\left(z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 - \frac{1+z^2}{1-z^2}z\frac{\partial}{\partial z} - n^2\frac{z}{(1+z)^2}\right)f_{i,j} = \lambda f_{i,j}.$$

Daraus folgt natürlich sofort, daß der Raum der Matrixkoeffizienten höchstens die Dimension 2 hat, also liefert Lemma 1 die Abschätzung $\dim(\mathcal{H}_n) \leq 2$.

Ich will nun die Formel in Lemma 2 aus der aus der Gleichung (1) ableiten. Das ist ein wenig mühsam, der Leser kann ohne weiteres zum Ende dieser Rechnung übergehen. Die Rechnung hat aber auch eine systematische Bedeutung, deshalb soll sie hier durchgeführt werden. Es ist natürlich klar, daß der Differentialoperator C, der ein Differentialoperator zweiter Ordnung auf G_∞ ist, auf $K \times A_{-}^{\leq 1} \times K$ auch einen solchen Operator induziert. Um diesen Operator zu berechnen, müssen wir zunächst für einen Punkt

$$x = (\phi_1, t, \phi_2) \in K \times A_{-}^{\leq 1} \times K$$

die Ableitung der Abbildung J ausrechnen, das ist die Abbildung zwischen den Tangentialräumen

$$D_J(x) : T_x \longrightarrow T_g = \mathfrak{g}.$$

Ein Element aus T_x ist von der Form

$$\xi_1 Y_1 + \eta H + \xi_2 Y_2,$$

wobei $Y_1 = Y = Y_2 \in \mathfrak{k}$ ist, aber jeweils als Vektorfeld in der jeweiligen Komponente interpretiert wird, anders gesagt es ist $Y_i = \frac{\partial}{\partial \phi_i}$ für $i = 1, 2$. Wir führen nun wieder eine Rechnung modulo höheren Potenzen durch (Siehe (3.5.1)), es ist mit $x = (k_1, h(t), k_2)$

$$J(k_1(Id+\xi_1 Y_1), h(t)(Id+\eta H), k_2(Id+\xi_2 Y_2) = k_1(Id+\xi_1 Y_1)h(t)(Id+\eta H)k_2(Id+\xi_2 Y_2)$$

$$= k_1 h(t) k_2 (Id + ad(k_2^{-1}) ad(h(t)^{-1}) \xi_1 Y_1 + ad(k_2^{-1}) \eta H + \xi_2 Y_2)$$
$$= k_1 h(t) k_2 (Id + ad(k_2^{-1})(ad(h(t)^{-1}) \xi_1 Y_1 + \eta H + ad(k_2) \xi_2 Y_2)).$$

Dann bekommen wir für die Ableitung die Formel

$$D_J(k_1, h(t), k_2) : \xi_1 Y_1 + \eta H + \xi_2 Y_2 \longrightarrow ad(k_2^{-1})(ad(h(t)^{-1} \xi_1 Y_1 + \eta H + \xi_2 Y_2).$$

Wir bemerken jetzt, daß $Y = E_+ - E_-$ und $ad(k_2)Y = Y$. Ferner gilt

$$ad(h(t)^{-1})Y = t^{-2} E_+ - t^2 E_-$$

und das liefert uns für die rechte Seite den Ausdruck

$$ad(k_2^{-1}) \left(\xi_1 \frac{t^{-2} - t^2}{2} V + \eta H + \left(\xi_2 + \xi_1 \frac{t^2 + t^{-2}}{2} Y \right) \right).$$

Setzen wir dann $k_2 = e(\phi_2)$ und bedenken wir, daß

$$ad(k_2^{-1})V = -\sin(2\phi_2)H + \cos(2\phi_2)V$$

$$ad(k_2^{-1})H = \cos(2\phi_2)H + \sin(2\phi_2)V,$$

dann wird der Ausdruck auf der rechten Seite gleich

$$\xi_1 \frac{t^{-2} - t^2}{2}(-\sin(2\phi_2)H + \cos(2\phi_2)V) + \eta(\cos(2\phi_2)H + \sin(2\phi_2)V) + \left(\xi_2 + \xi_1 \frac{t^2 + t^{-2}}{2} \right) Y =$$

$$\left(\xi_1 \frac{t^{-2} - t^2}{2} \cos(2\phi_2) + \eta \sin(2\phi_2) \right) V + \left(-\frac{t^{-2} - t^2}{2} \sin(2\phi_2) + \eta \cos(2\phi_2) \right) H + \left(\xi_2 + \xi_1 \frac{t^2 + t^{-2}}{2} \right) Y.$$

Dieser Ausdruck ist also das Bild von $\xi_1 \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \eta H + \xi_2 \frac{\partial}{\partial \phi_2}$ unter D_J an der Stelle $x = (k_1, h(t), k_2)$. Dann sehen wir, daß $D_J(x)$ den folgenden Effekt hat:

$$\frac{2\cos(2\phi_2)}{t^{-2} - t^2} \frac{\partial}{\partial \phi_1} + \sin(2\phi_2) t \frac{\partial}{\partial t} - \cos(2\phi_2) \frac{t^2 + t^{-2}}{t^{-2} - t^2} \frac{\partial}{\partial \phi_2} \longrightarrow V$$

$$-\frac{2\sin(2\phi_2)}{t^{-2}-t^2}\frac{\partial}{\partial\phi_1}+\cos(2\phi_2)t\frac{\partial}{\partial t}+\sin(2\phi_2)\frac{t^2+t^{-2}}{t^{-2}-t^2}\frac{\partial}{\partial\phi_2}\longrightarrow H$$

$$\frac{\partial}{\partial\phi_2}\longrightarrow Y$$

Nun muß man in den sauren Apfel beißen und $C=(-Y^2+H^2+V^2)/4$ ausrechnen. Dabei muß man natürlich in Betracht ziehen, daß einige der Operatoren nicht miteinander vertauschen. Wir berechnen zuerst einmal die Terme, die aus Operatoren zweiter Ordnung bestehen, wir vergessen also, daß wir die Koeffizienten mitdifferenzieren müssen. Dann erhalten wir für $4C$ den Beitrag

$$\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^2+\frac{4}{(t^2-t^{-2})^2}\left(\frac{\partial}{\partial\phi_1}\right)^2+\left(\left(\frac{t^2+t^{-2}}{t^2-t^{-2}}\right)^2-1\right)\left(\frac{\partial}{\partial\phi_2}\right)^2-4\frac{t^2+t^{-2}}{(t^2-t^{-2})^2}\frac{\partial}{\partial\phi_1}\frac{\partial}{\partial\phi_2}$$

$$=\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^2+\frac{4}{(t^2-t^{-2})^2}\left(\frac{\partial}{\partial\phi_1}\right)^2+\frac{4}{(t^2-t^{-2})^2}\left(\frac{\partial}{\partial\phi_2}\right)^2-4\frac{t^2+t^{-2}}{(t^2-t^{-2})^2}\frac{\partial}{\partial\phi_1}\frac{\partial}{\partial\phi_2}.$$

Wir betrachten nun die Terme erster Ordnung in V^2 und H^2. Sie kommen ja dadurch zu Stande, daß man die Koeffizienten differenziert. Da sieht man aber sehr leicht, daß die Beiträge, die jeweils vom ersten und dritten Term in V und H herkommen, sich herausheben. Auch die Beiträge vom ersten und dem zweiten Term heben sich auf. Dann bleiben also der zweite und der dritte Term. Dabei erhalten wir in V^2 und in H^2 jeweils zwei Terme, einmal müssen die Koeffizienten von $\frac{\partial}{\partial\phi_2}$ nach t differenziert werden und dann müssen die Koeffizienten von $t\frac{\partial}{\partial t}$ nach ϕ_2 differenziert werden. Man sieht wieder, daß die beiden ersten Beiträge sich herausheben, und die Beiträge, die von der Differentiation nach ϕ_2 herkommen summieren sich zu

$$-2\frac{t^2+t^{-2}}{t^{-2}-t^2}t\frac{\partial}{\partial t}.$$

Faßt man alle Terme zusammen, so erhält man genau die Formel in Lemma 2 für den Casimirschen Operator in den Koordinaten (ϕ_1,t,ϕ_2).

4.1.2. *Die Analyse der Differentialgleichung*: Wir schreiben die Differentialgleichung für die Matrixkoeffizienten noch ein wenig anders

$$\left(\left(\frac{d}{dz}\right)^2+\left(-\frac{1+z^2}{(1-z^2)z}+\frac{1}{z}\right)\frac{d}{dz}-\frac{n^2}{z(1+z)^2}-\frac{\lambda}{z^2}\right)f=0.$$

Zunächst haben wir dies als eine Differentialgleichung auf dem Intervall $(0,1)$ interpretiert. Aber sie kann auch als eine Differentialgleichung in der ganzen Riemannschen Kugel mit meromorphen Koeffizienten betrachtet werden. Sie hat Singularitäten in den Punkten $0,1,-1$ und ∞ . Diese Singularitäten sind im Sinne der klassischen Terminologie reguläre Singularitäten, d.h die Ordnungen der Pole der Koeffizienten von $\left(\frac{d}{dz}\right)^2$ bzw. $\frac{d}{dz}$ bzw. $\left(\frac{d}{dz}\right)^0$ sind 0 bzw. ≤ 1 bzw. ≤ 2 an den jeweiligen singulären Punkten. Für solche Differentialgleichungen gibt es eine klassische Theorie (Siehe (C-L, Chap IV)). Für uns ist die folgene Tatsache wichtig: die Lösungen haben asymptotische Entwicklungen um die singulären Punkte. Das soll kurz erläutert werden. Wir schneiden die komplexe Ebene von 0 bis $-\infty$ und von 1 bis $+\infty$ auf, auf der aufgeschnittenen Ebene wählen wir einen Zweig von $\log(z)$. Dann ist für jede komplexe Zahl μ die Funktion $z^\mu = e^{\mu \log(z)}$ definiert. Man versucht, dann die Differentialgleichung durch einen Ansatz

$$z^\mu(1 + a_1 z + \dots) = z^\mu F(z)$$

zu lösen. Man erhält dann für μ eine quadratische Gleichung, es muß offensichlich gelten

$$\mu(\mu - 1) = \lambda,$$

d.h. wir haben

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\lambda + 1}$$

Es sei nun D die Einheitskreisscheibe in der komplexen Ebene, dann gilt:

4.1.2.1 : (1) *Wenn $\mu_1 - \mu_2$ keine ganze Zahl ist, dann gibt es Funktinionen F_1 und F_2, die in D holomorph sind und die an der Stelle* 0 *den Wert* 1 *annehmen, so daß*

$$a z^{\mu_1} F_1(z) + b z^{\mu_2} F_2(z)$$

ie allgemeinen Lösung der Differentialgleichung in $D \setminus [-1, 0]$ ist.

(2) Wenn die Differenz $\mu_1 - \mu_2 \in 2\mathbb{Z}$, dann gilt entweder die gleiche Aussage, oder die allgemeine Lösung hat die Form

$$a z^{\mu_1} F_1(z) + b z^{\mu_2} \log(z) F_2(z)$$

Einen Beweis findet man z.B. in (C-L Chap. IV), er kann von jederman geführt werden der die Funktionentheorie verstanden hat. Man nennt die Zahlen μ_1, μ_2 auch die *leitenden Exponenten*.

Im Folgenden wollen wir die weiteren Aussagen immer so formulieren, als ob wir im ersten Fall sind, die Aussagen im zweiten Fall übertragen sich dann mutatis mutandis.

Wir sehen also, daß wir nach der obigen Aussage über die Lösungen der Differentialgleichung für die Matrixkoeffizienten eine asymptotische Entwicklung erhalten:

$$\tilde{c}(0, t, 0) \simeq t^{2\mu_1}(a_0 + a_1 t^2 + \dots) + t^{2\mu_2}(b_0 + b_1 t^2 + \dots),$$

dabei sind a_0 und b_0 nicht beide gleichzeitig gleich Null.

Monodromie : Man kann einen Basispunkt $x_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1. -1\} = X$ dann bekommt man eine Opeation der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ auf dem Vektorraum der Lösungen der Differentialgleichung. Wählen wir x_0 so, dass er nahe bei Null liegt, dann liefert uns der Weg um Null linksherum ein Element σ_0 dieser Homotopiegruppe und die Lösungen $z^{\mu_1} F_1(z), b z^{\mu_2} F_2(z)$ sind Eigenlösungen mit den Eigenwerten $e^{2\pi i \mu_1}, e^{2\pi i \mu_2}$ für σ_0. Diese Eigenwerte sind verschieden, wenn $\mu_1 - \mu_2 \notin \mathbb{Z}$. Wenn der Ausnahmefall $\mu_1 - \mu_2 \in \mathbb{Z}$ eintritt können wir diese Operation von σ_0 unter Umständen nicht diagonalisieren, dann brauchen wir den Faktor $\log(z)$ und wir bekommen einen Jordanblock.

Generell ist natürlich klar, daß sich die Matrixkoeffizienten unitärer Darstellungen immer durch $|< gv, w >|^2 \leq < v, v >< w, w >$ abschätzen lassen, sie sind beschränkt. Das genaue Verhalten für $t \longrightarrow 0$, d.h. wenn wir in der Gruppe nach ∞ gehen, hängt von den leitenden Exponenten μ_1, μ_2 ab. Für eine unitäre Darstellung ist der Eigenwert λ natürlich stets reell. Wenn

$$\lambda \leq -\frac{1}{4},$$

dann ist ist $\sqrt{4\lambda+1}$ rein imaginär und beide Terme in der asymptotischen Entwicklung der Matrixkoeffizienten gehen gleich schnell, nämlich wie t, nach Null, wenn t gegen Null geht. Ist dagegen

$$\lambda > -\frac{1}{4},$$

dann geht einer der Terme schneller gegen Null als der andere. Ist dann schließlich sogar

$$\lambda > 0$$

dann ist sogar einer der Terme in der asymptotischen Entwicklung unbeschränkt, wir können daher keine unitäre Darstellung mit diesem Eigenwert für C haben, es sei denn dieser Term verschwindet. Dies kommt, wie wir später sehen werden, in der Tat für die Werte

$$\lambda = \frac{n^2-1}{4}$$

mit $n = 1, 2, \ldots$ vor. Der andere Term in der Entwicklung geht dann so schnell gegen Null für t gegen Null, daß die Matrixkoeffizienten in $L^2(G_\infty)$ oder sogar in $L^1(G_\infty)$ liegen. Das sind dann die Darstellungen der diskreten Serie.

Die obigen Überlegungen gelten nur unter der Annahme, daß die Vektoren v, w in $< gv, w >$ von *reinem* -K-Typ sind, d.h. daß ihr Träger nur aus einem K-Typ besteht (Siehe III,***). Diese Vorausetzung ging bei der Elimination der Variablen ϕ_1, ϕ_2 ein. (Es muß sich nicht unbedingt um den gleichen K-Typ handeln.)

4.1.3*Die Matrixkoeffizienten von Harish-Chandra Moduln*: Wir wollen jetzt von der Annahme abgehen, daß uns eine irreduzible unitäre Darstellung vorgegeben ist, sondern wir wollen statt dessen einen irreduziblen Harish-Chandra Modul $\mathcal{V}$ für $(\mathfrak{g}, K)$ betrachten. Wir wollen auch für diese allgemeinere Situation eine Aussage über daß asymptotische Verhalten von Matrixkoeffizienten machen. Wir wissen nach Definition, daß

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{n \in 2\mathbb{Z}} \mathcal{V}_n$$

mit $\dim \mathcal{V}_n < \infty$ und wir wissen, daß C durch einen Skalar, den wir wieder λ nennen auf $\mathcal{V}$ operiert. Man kann nun den zu $\mathcal{V}$ dualen Harish-Chandra Modul definieren. Dazu betrachtet man zunächst den Dualraum

$$\mathcal{V}^* = Hom(\mathcal{V}, \mathbb{C})$$

und darin hat man als $(\mathfrak{g}, K)$-Untermodul den Raum

$$\mathcal{V}^\flat = \bigoplus_{n \in 2\mathbb{Z}} \mathcal{V}_n^*.$$

Man hat jetzt zwar keine Operation von G_∞ auf $\mathcal{V}$ und $\mathcal{V}^\flat$, trotzdem kann man Matrixkoeffizienten

$$< gv, \phi > \text{ für } \quad v \in \mathcal{V}, \phi \in \mathcal{V}^\flat$$

definieren(Siehe C-M,**). Man muß sich eigentlich nur klar machen, daß

$$< \exp(\tau H)v, \phi >= \sum \frac{\tau^n}{n!} < H^n v, \phi >$$

konvergiert. Dann übertragen sich die Überlegungen aus dem vorangehenden Abschnitt auf diese Situation. Man muß nur damit rechnen, daß jetzt λ nicht mehr notwendig reell ist.

Es sei jetzt $\mathfrak{u} = \mathbb{R}E_+$ die Liesche Algebra des unipotenten Radikals U_∞. Wir betrachten den Quotienten

$$\mathcal{V}/\mathfrak{u}\mathcal{V},$$

dies ist dann ein Modul für die Liesche Algebra $\mathfrak{t}$ des maximalen Torus T_∞. Aber auch die Gruppe $K^T = T_\infty \cap K$, die nur aus den beiden Elemente $h(\pm 1)$ besteht, operiert darauf, der Quotient ist also ein $(\mathfrak{t}, K^T)$-Modul. Nun gilt die fundamentale Tatsache

Satz 4.1.3.1 *Es sei $\mathcal{V}$ ein irreduzibler Harish-Chandra Modul, dann ist der Modl $\mathcal{V}/\mathfrak{u}\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter, von Null verschiedener,* $(\mathfrak{t}, K^T)$*- Modul*

Beweis: Die Tatsache, daß dieser Modul endlich erzeugt ist, ist nicht sehr schwer einzusehen, wir gehen davon aus, daß der Modul $\mathcal{V}$ endlich erzeugt als $(\mathfrak{g}, K)$ - Modul ist. Wir wählen ein System von erzeugenden Elementen. Nach Definition des Harish-Chandra Moduls sind diese Erzeugenden in einer endlichen Summe von K-isotypischen Summanden enthalten, die selber einen endlich dimensionalen Unterraum von $\mathcal{V}$ erzeugen. Es sei dann $v_1, v_2, \ldots, v_N$ ein System von Erzeugenden für diesen Untervektorraum. Ich behaupte, daß die Bilder dieser v_i in $\mathcal{V}/\mathfrak{u}\mathcal{V}$ diesen Quotienten als $(\mathfrak{t}, K^T)$-Modul erzeugen. Um das einzusehen, gehen wir davon aus, daß die universelle Einhüllende von $\mathfrak{g}$ von Elementen der Form $E_+^\alpha H^\beta Y^\beta$ erzeugt wird. Nun ist aber Yv_i wieder eine Linearkombination der v_j. Auf der anderen Seite sehen wir aber, daß ein Element der obigen Form, in dem α größer als Null ist, uns unwiederbringlich nach $\mathfrak{u}\mathcal{V}$ hineinschleudert. Also wird der Quotient $\mathcal{V}/\mathfrak{u}\mathcal{V}$ von den Elementen der Form $H^\beta v_i$ erzeugt.

Viel weniger klar ist die Aussage, daß der Quotient nicht der Nullmodul ist. Um das einzusehen, betrachten wir einen Matrixkoeffizienten der Form $< gE_+v, \phi >$ mit irgendwelchen $v \in \mathcal{V}, \phi \in \mathcal{V}^\flat$. Wir setzen speziell für g ein Element der Form $h(t)$ ein, und schauen, was passiert, wenn t gegen Null geht. Es gilt jetzt

$$h(t)E_+ = t^2 E_+ h(t).$$

Also ist

$$< h(t)E_+v, \phi >= t^2 < E_+h(t)v, \phi >= -t^2 < h(t)v, E_+\phi > .$$

Daraus sehen wir aber, daß $< h(t)E_+v, \phi >$ um den Faktor t^2 schneller nach Null geht als $< h(t)v, E_+\phi >$. Wenn man nun die Resultate über die asympotische

Entwicklung der Matrixkoeffizienten heranzieht, dann sieht man, daß für einen von Null verschiedenen, endlich erzeugten Modul $\mathcal{V}$ die Elemente der Form E_+v einen echten Untermodul aufspannen. $\square$

(Man sollte bedenken, daß wir die asymtotische Entwicklung mit den leitenden Exponenten μ_1, μ_2 für den Fall erhalten haben, daß v, ϕ reine K-Typen sind. Unsere Überlegungen zeigen uns also, daß ein Element der Form E_+v stets mehr als einen K-Typ in der isotypischen Zerlegung hat, und dadurch kommt es zu Kürzungen in der Entwicklung.)

Der obige Satz ist deswegen fundamental, weil er es erlaubt, die Untersuchung der Struktur von $(\mathfrak{g}, K)$-Moduln auf die von $(\mathfrak{t}, K^T)$- Moduln zurückzuführen. Die Struktur der $(\mathfrak{t}, K^T)$-Moduln ist aber ganz leicht zu verstehen. Ein $(\mathfrak{t}, K^T)$-Modul ist ein Vektorraum $\mathcal{W}$, auf dem $K^T = \{\pm 1\}$ und eine Unbestimmte $t\frac{\partial}{\partial t}$ vertauschend operieren. Unter der Operation von K^T zerfällt der Vektorraum in einen + und einen - Anteil und diese Anteile sind dann $\mathbb{C}[t\frac{\partial}{\partial t}]$-Moduln, d.h. es sind Moduln für den Polynomring in einer Variablen. Dann ist ganz klar, daß jeder endlich erzeugte von Null verschiedene $(\mathfrak{t}, K^T)$-Modul einen irreduziblen von Null verschiedenen Quotienten besitzt. Ferner ist es ganz einfach, die irreduziblen $(\mathfrak{t}, K^T)$-Moduln zu beschreiben. Sie sind von der Dimension 1, d.h. isomorph zu $\mathbb{C}$, und die Modulstruktur wird durch die folgenden Daten gegeben: Der Operator $t\frac{\partial}{\partial t}$ wirkt durch Multiplikation mit einer komplexen Zahl s und das nichttriviale Element $h(-1) \in K^T$ wirkt durch Multiplikation mit $(-1)^m$. Wir fassen diese beiden Daten zu Einem zusammen und setzen $\chi = (s, m)$, wobei natürlich m modulo2 zu nehmen ist. Wir bezeichnen diesen irreduziblen $(\mathfrak{t}, K^T)$-Modul dann mit $\mathbb{C}_\chi$.

Wir können diese Darstellungen von $(\mathfrak{t}, K^T)$ auch integrieren, d.h. als Ableitung einer Darstellung von T_∞ schreiben. Dazu ordnen wir einfach dem Datum $\chi = (s, m)$ einen Quasicharakter

$$\chi : T_\infty \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

durch

$$\chi : h(t) \longrightarrow |t|^s \left(\frac{t}{|t|}\right)^m$$

zu. Dann wird $\mathbb{C}_\chi$ auch ein T_∞-Modul.

Zusammenfassend können wir also sagen:

4.1.3.2 *Zu jedem von Null verschiedenen (irreduziblen) Harish-Chandra-Modul $\mathcal{V}$ gibt es einen Quasicharakter χ auf T_∞, so daß es einen surjektiven Homomorphismus*

$$\Phi : \mathcal{V}/\mathfrak{u}\mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{C}_\chi$$

gibt.

Bemerkung 4.1.3.2: Es ist klar, daß wir noch weitere Einschränkungen an die Struktur von $\mathcal{V}/\mathfrak{u}\mathcal{V}$ haben: Wenn wir noch in Betracht ziehen, daß der Casimirsche Operator in der Form

$$C = (H^2 - 2H + E_+E_-)/4$$

geschrieben werden kann, dann folgt, daß der Operator

$$H^2 - 2H - 4\lambda$$

den Modul $\mathcal{V}/\mathfrak{u}\mathcal{V}$ annulliert.

4.1.4 *Die Darstellungen der Hauptserie*: Im vorangehenden Abschnitt haben wir die Quasicharaktere $\chi : T_\infty \longrightarrow \mathbb{C}^*$ eingeführt, sie bilden eine Gruppe, die wir mit $\mathcal{X}$ bezeichnen und die wir als additive Gruppe schreiben. Wir werden bei der Notation $\chi = (s, m)$ bleiben. Wir wissen, daß $B_\infty = U_\infty \times T_\infty$ und schreiben für $b \in B_\infty$ einfach $b = u(b) \times h(b)$. Dann können wir einen solchen Quasicharakter χ auch als einen Homomorphismus

$$\chi : B_\infty \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

interpretieren, wobei wir für $b \in B_\infty$ setzen

$$\chi(b) = b^\chi = \chi(h(b)).$$

Wir wollen ein solches χ stets gleichzeitig als Quasicharakter auf B_∞ und T_∞ ansehen.

Es gibt noch einen Quasicharakter, der einen besondere Rolle spielt, das ist der Quasicharakter

$$\delta : h(t) \longrightarrow |t|.$$

Zu jedem Quasicharakter χ definieren wir nun den induzierten Modul, wobei wir mit der sogenannten unitären Induktion arbeiten. Dazu betrachten wir den Vektorraum

$$\mathcal{H}_\chi = \{f |: f : G_\infty \longrightarrow \mathbb{C},\ f(bg) = b^{\chi+\delta} f(g) \text{ mit } f|K \text{ ist in } L^2(K)\}.$$

Um diesen Raum besser zu verstehen, erinnern wir uns an die Iwasawa-Zerlegung (Siehe II,***), wir haben eine surjektive Abbildung

$$J : U_\infty \times T_\infty \times K \longrightarrow G_\infty,$$

diese Abbildung ist 2 zu 1, das ergibt sich sofort, wenn man bedenkt, daß $B_\infty \cap K = \{h(\pm 1)\}$.

Eine Funktion $f \in \mathcal{H}_\chi$ ist also durch ihre Einschränkung auf K bestimmt, und man sieht leicht, daß wir eine Identifizierung

$$\mathcal{H}_\chi = \{f \in L^2(K) | f(h(-1)k) = (-1)^m f(k)\}.$$

vornehmen können. Man zeigt ohne Schwierigkeit, daß die Gruppe G_∞ durch Translationen von rechts stetig auf $\mathcal{H}_\chi$ operiert. Wir bekommen also eine Darstellung

$$\rho_\chi : G_\infty \longrightarrow Gl(\mathcal{H}_\chi),$$

man nennt diese Darstellung die von dem Quasicharakter χ induzierte Darstellung. Wir haben es hier mit der sogenannten unitären Induktion zu tun (Siehe ***), weil wir noch die Verschiebung um δ haben. Wenn wir die gewöhnliche naive Induktion betrachten, dann erhalten wir das gleiche Resultat, wenn wir $\chi + \delta$ induzieren. Wir schreiben also

$$\mathcal{H}_\chi = \text{ Indunit}_{B_\infty}^{G_\infty} \chi = \text{ Ind}_{B_\infty}^{G_\infty} (\chi + \delta),$$

man nennt diese Darstellungen die Darstellungen der Hauptserie, (sie sind in der Regel nicht unitär, obwohl sie durch unitäre Induktion erhalten werden (Siehe 4.1.4.3)).

Es ist leicht, den Modul $\mathcal{H}_\chi$ isotypisch nach den K-Typen zu zerlegen. Dazu definieren wir für $n \equiv m \mod 2$ die Funktion ψ_n auf G_∞ durch

$$\psi_n(g) = \psi_n(be(\phi)) = b^{\chi+\delta} e^{in\phi} = \chi(b)\delta(b)e^{in\phi}$$

dann ist

$$\mathcal{I}_\chi = \bigoplus_{n \equiv m \mod 2} \mathbb{C}\psi_n = \mathcal{H}_\chi^{(K)}$$

der Raum der K- endlichen Vektoren in $\mathcal{H}_\chi$. Der Raum $\mathcal{I}_\chi$ ist dann ein Harish-Chandra-Modul für $(\mathfrak{g}, K)$, die Gruppe G_∞ operiert darauf aber nicht.

Wir wollen die Beziehung zu den Überlegungen im vorangehenden Abschnitt herstellen. Es sei $\mathcal{V}$ ein Harish-Chandra-Modul für $(\mathfrak{g}, K)$, wir schauen uns mal den Vektorraum

$$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\mathcal{V}, \mathcal{I}_\chi)$$

an. Um diesen Raum von Abbildungen zu verstehen, wendet man das Prinzip der Frobeniusreziprozität an. Ein $\Phi \in \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\mathcal{V}, \mathcal{I}_\chi)$ ordnet jedem Element $v \in \mathcal{V}$ ein $\Phi(v) \in \mathcal{H}_\chi$ zu und die Funktion $\Phi(v)$ können wir an der Stelle $1 \in G_\infty$ auswerten. Wir setzen

$$\Phi'(v) = \Phi(v)(1),$$

und man sieht sehr leicht, daß $\Phi' : \mathcal{V}/\mathfrak{u}\mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Element von $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{t},K^T)}(\mathcal{V}/\mathfrak{u}\mathcal{V}, \mathbb{C}_{\chi+\delta})$ ist. Die Frobeniusreziprozität sagt nun, daß die Zuordnung $\Phi \longrightarrow \Phi'$ einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\mathcal{V}, \mathcal{I}_\chi) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{t},K^T)}(\mathcal{V}/\mathfrak{u}\mathcal{V}, \mathbb{C}_{\chi+\delta})$$

liefert. Dies ist leicht einzusehen, man kann die Umkehrabbildung direkt hinschreiben.

Wenn wir dies nun mit dem Satz 4.1.3.2 kombinieren, dann erhalten wir

Satz 4.1.4.1 (Submodultheorem von Harish-Chandra und Casselman): *Zu jedem irreduziblen Harish-Chandra -Modul* $\mathcal{V}$ *gibt es einen Quasicharakter* $\chi \in \mathcal{X}$, *s.d. wir einen Einbettung*

$$i : \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{I}_\chi$$

von $(\mathfrak{g}, K)$ *-Moduln haben.*

Um diesen Quasicharakter zu finden, gehen wir davon aus, daß $\mathcal{V}$ einen zentralen Charakter besitzt. Dann werden wir darauf geführt, die Aktion von C auf $\mathcal{I}_\chi$ zu studieren. Der Casimirsche Operator ist in der Normierung von 4.1 und umgeschrieben wie in 3.7.10.3 durch

$$C = (-Y^2 + H^2 + V^2)/4 = (H^2 - 2H + E_+E_-)/4$$

gegeben. Weil dieser Operator nun aber invariant unter der adjungierten Darstellung ist, können wir ihn auch von links auf die Funktionen in $\mathcal{I}_\chi$ anwenden, dabei müssen wir allerdings die Reihenfolge der Faktoren in den Produkttermen umdrehen. Nun sind die Funktionen in $\mathcal{I}_\chi$ aber linksinvariant unter U_∞. Das hat zur Folge, daß $(E_+)_r f(g) = 0$, wobei der Index r andeuten soll, daß wir von links ableiten, d.h. wir fassen E_+ als rechtsinvariantes Vektorfeld auf(Siehe 3.4). Also bekommen wir

$$Cf = \frac{(H_r)^2 - 2H_r}{4} f.$$

Nun ist aber nach Konstruktion von $\mathcal{I}_\chi$ stets $(H_r)f = (s+1)f$, wir bekommen also für $f \in \mathcal{I}_\chi$ die Gleichung

$$Cf = \frac{s^2 - 1}{4} f. \tag{2}$$

Wir sehen also, daß ein irreduzibler Harish-Chandra-Modul $\mathcal{V}$ immer zu einem Untermodul eines der Moduln $\mathcal{I}_\chi$ isomorph ist, für den Wert von $\chi = (s, m)$ haben wir dann in der Regel genau 4 Möglichkeiten, nur wenn C auf $\mathcal{V}$ den Eigenwert $-1/4$ hat, dann haben wir nur zwei Möglichkeiten.

Damit haben wir jetzt auch die scharfe Dimensionsabschätzung (b) in dem Theorem von Harish-Chandra bewiesen. Um die Aussage (c) zu beweisen, genügt es offensichlich zu zeigen, daß in $\mathcal{H}_\chi$ nur endlich viele Moduln als Subquotienten auftauchen.

4.1.5 *Die Struktur der Moduln $\mathcal{H}_\chi$ und $\mathcal{I}_\chi$* : Aus den Überlegungen des vorangehenden Abschnitts ergibt sich, daß wir uns um die Struktur der oben definierten Darstellungen kümmern müssen, wir müssen ihre Jordan-Hölder Kompositionsreihen bestimmen.

Wir beginnen mit der Beobachtung, daß der Modul

$$\mathcal{H}_{-\delta} = \{f | f(bg) = f(g)\}$$

den eindimensionalen Untermodul $\mathbb{C}$, der aus den konstanten Funktionen besteht, enthält, er ist also nicht irreduzibel.

Dazu gibt es nun eine duale Aussage:

Satz 4.1.5.1:*(i) Die Abbildung*

$$\mathrm{Int} : f \longrightarrow \int_K f(k)\, dk$$

von $\mathcal{H}_\delta \longrightarrow \mathbb{C}$ ist eine G_∞-invariante lineare Abbildung, die auch auf dem Teilraum $\mathcal{I}_\delta$ nicht trivial ist.

(ii) Der Untermodul

$$\mathcal{S} = \bigoplus_{n \neq 0, n \equiv 0 \bmod 2} \mathbb{C}\psi_n$$

von $\mathcal{I}_\delta$ (bzw. sein Abschluß in $\mathcal{H}_\delta$) sind $\mathfrak{g}$ (bzw. G_∞)-invariante Untermoduln.

Beweis: Es ist offensichtlich, daß

$$\mathrm{Int}(\psi_n) = 0 \quad \text{für} \quad \neq 0$$

und

$$\mathrm{Int}(\psi_0) = 1,$$

wobei wir das Maß dk so normiert haben, daß das Volumen von K gleich 1 ist. Dann ist aber ziemlich klar, daß die Aussagen (i) und (ii) sich gegenseitig implizieren. Ich beweise nun die Aussage (i) mit einem Argument, das an dieser Stelle nicht das bequemste ist, wir werden später noch ein einfaches Argument für (ii) kennen lernen. Aber diesem Beweis von (i) kommt eine systematische Bedeutung zu.

Wir betrachten wieder die Iwasawa-Abbilldung aus 4.1.4

$$J : U_\infty \times T_\infty \times K \longrightarrow G_\infty$$

$$J : (u, t, k) \longrightarrow utk = g.$$

Auf $U_\infty \times T_\infty \times K$ führen wir nun das Produktmaß

$$t^{-2\delta} du \times \frac{dt}{t} \times dk$$

ein, wobei natürlich die einzelnen Faktoren die invarianten Maße auf den Faktoren sind. (Wir setzen jetzt mal $h(t) = t$.) Die Iwasawa-Abbildung ist mit der Operation von B_∞ von links und der Operation von K von rechts verträglich. Es gilt für

$$b_0 = \begin{pmatrix} 1 & u_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_0 & 0 \\ 0 & t_0^{-1} \end{pmatrix}$$

daß

$$b_0(u, t, k) = (t_0 u t_0^{-1}, t_0 t, k).$$

Man überzeugt sich nun leicht davon, daß das obige Integral linksinvariant unter der Operatiom von B_∞ ist und rechtsinvariant unter K ist. Wenn man jetzt für eine $\mathcal{C}_{\infty,c}$ Funktion f das Integral

$$\int (f \circ J)(u, t, k) t^{-2\delta} du \times \frac{dt}{t} \times dk$$

bildet, dann ergibt dies ein Maß auf G_∞, das linksinvariant unter B_∞ und rechtsinvariant unter K ist. Da diese Maß sich aber offensichtlich nur um einen Faktor $d(g)$ vom Haarschen Maß unterscheiden kann, und da dieser Faktor auch die obigen Invarianz zulassen muß , folgt, daß $d(g)$ konstant sein muß, d.h.

$$t^{-2\delta} du \times \frac{dt}{t} \times dk$$

definiert ein Haarsches Maß auf G_∞.

Definiert man jetzt für $f \in \mathcal{C}_{\infty,c}(G_\infty)$ die Funktion

$$f^B(g) = \int f(utg) t^{-2\delta} du \frac{dt}{t},$$

so erhalten wir für $b_0 \in B_\infty$

$$f^B(b_0 g) = \int f(utb_0 g) t^{-2\delta} du \frac{dt}{t} = \int f(ut \cdot h(b_0) \cdot g) t^{-2\delta} du \frac{dt}{t} = h(b_0)^{2\delta} f^B(g).$$

Also ist $f^B \in \mathcal{H}_\delta$ und man sieht leicht, daß diese Funktionen einen dichten Teilraum von $\mathcal{H}_\chi$ aufspannen. Dann ist aber

$$\int_K f^B(kg)\, dk = \int f(utkg)\, t^{-2\delta} du \times \frac{dt}{t} \times dk,$$

und wegen der Invarianz von $t^{-2\delta} du \times \frac{dt}{t} \times dk$ ist dies gleich

$$\int f(utk)\, \mathcal{M} = \int_K f^B(k)\, dk.$$

Damit haben wir die Invarianz der Linearform Int auf einem dichten Teilraum nachgewiesen und das genügt.

4.1.5.2 : Man kann jetzt diese lineare Abbildung Int benutzen, um eine G_∞ (bzw. $\mathfrak{g}$)-invariante Paarung

$$\Phi : \mathcal{H}_\chi \times \mathcal{H}_{-\chi} \longrightarrow \mathbb{C}$$

bzw.

$$\Phi : \mathcal{I}_\chi \times \mathcal{I}_{-\chi} \longrightarrow \mathbb{C}$$

zu definieren. Man muß nur bemerken, daß das Produkt eines Elements $g \in \mathcal{H}_\chi$ und eines Elements $f \in \mathcal{H}_{-\chi}$ in $\mathcal{H}_\delta$ liegt, wir setzen also

$$\Phi(g, f) = \text{ Ind } (gf).$$

Man zeigt leicht, daß

$$\Phi(\psi_n, \psi_{-n}) \neq 0 \ \textit{ und } \ \Phi(\psi_n, \psi_m) = 0 \ \text{ , für } \quad n \neq m$$

4.1.5.3: Wir haben zu jedem G_∞-Modul $\mathcal{H}_\chi$ auch den komplex-konjugierten Modul $\overline{\mathcal{H}_\chi}$ (Siehe 3.7.3.). Es ist klar, daß

$$\overline{\mathcal{H}_\chi} = \mathcal{H}_{\overline{\chi}}$$

und die entsprechende Aussage gilt für ie Moduln $\mathcal{I}_\chi$. Es ist $\overline{\chi}(t) = \overline{\chi(t)} = (-1)^m |t|^{\overline{s}}$. Wenn also s rein imaginär ist, dann haben wir $\overline{s} = -s$, also $\overline{\chi} = -\chi$. Wir sagen, daß χ rein imaginär ist, wenn $\chi = (s, m)$ und s rein imaginär ist. Dann bekommen wir

Für χ rein imaginär induziert die Paarung Φ ein positiv definites G_∞-invariantes Skalarprodukt

$$\mathcal{H}_\chi \times \mathcal{H}_\chi \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Man nennt diese Darstellungen mit rein imaginärem χ die Darstellungen der unitären Hauptserie. Ein Quasicharakter $\chi \in \mathcal{X}$ ist genau dann rein imaginär, wenn die Darstellung $\chi : T_\infty \longrightarrow \mathbb{C}$ unitär ist, die unitäre Induktion macht also aus unitären Moduln wieder unitäre Moduln.

4.1.5.4 : Wir wollen jetzt die Kompositionsreihen der Moduln $\mathcal{H}_\chi$ und $\mathcal{I}_\chi$ bestimmen. Wir kennen die endlich-dimensionalen Moduln für G_∞ und $\mathfrak{g}$, das sind die Moduln der homogenen Polynome vom Grad n in zwei Variablen (Siehe 3.6.2).

Diese Moduln kann man nun wie folgt realisieren. Wir betrachten den Raum von Funktionen

$$P : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow P(c,d),$$

wobei P ein homogenes Polynom vom Grad n mit komplexen Koeffizienten in den Variablen c, d ist. Wir nennen diesen Raum von Funktionen $\mathcal{M}_n$, es ist ein Modul für G_∞ durch die Translationen von links, und als solcher ist er isomorph zu Sym^n. Es ist für $f \in \mathcal{M}_n$

$$f\left(\begin{pmatrix} t & u \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = t^{-n} f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = |t|^{-n-1}\left(\frac{t}{|t|}\right)^n |t| f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$$

Wir sehen also, daß wir für $\chi = (-n-1, n)$ eine Inklusion von $\mathfrak{g}$-Moduln bekommen:

$$i_\chi : \mathcal{M}_n \hookrightarrow \mathcal{I}_\chi.$$

Wir erinnern uns jetzt an die in 4.1.5.2 konstruierte Paarung Φ und an die Tatsache, daß die Moduln $\mathcal{M}_n$ selbstdual sind. Beides zusammen gibt uns, daß wir für $\chi = (n+1, n)$ einen surjektiven $\mathfrak{g}$ invarianten Homomorphismus

$$p_\chi : \mathcal{I}_\chi \longrightarrow \mathcal{M}_n$$

haben.

Wir sehen also, daß für spezielle Werte von χ die Moduln $\mathcal{H}_\chi$ und $\mathcal{I}_\chi$ nicht irreduzibel sind. Das genaue Verhalten wird nun im nächsten Abschnitt untersucht.

4.1.5.5 :Um nun die Kompositionsreihe zu bestimmen, müssen wir die Operation von $\mathfrak{g}$ auf $\mathcal{I}_\chi$ etwas genauer untersuchen. Wir haben die Zerlegung der Lieschen Algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, und wir betrachten davon die Komplexifizierung. Dann entsteht

$$\mathfrak{g}_\mathbb{C} = \mathfrak{k}_\mathbb{C} \oplus \mathfrak{p}_\mathbb{C}$$

und für $\mathfrak{p}_\mathbb{C}$ haben wir eine Zerlegung in K-Typen

$$\mathfrak{p}_\mathbb{C} = \mathbb{C}(H + i \otimes V) \oplus \mathbb{C}(H - i \otimes V) = \mathbb{C}P_+ \oplus \mathbb{C}P_-.$$

Dann gilt für $e(\phi) \in K$

$$ad(e(\phi))P_+ = e^{2i\phi}P_+ \quad , ad(e(\phi))P_- = e^{-2i\phi}P_-.$$

Daraus ergibt sich

$$e(\phi)P_+\psi_n = e^{2i\phi}P_+e(\phi)\psi_n = e^{(n+2)i\phi}P_+\psi_n$$

d.h. wir haben $P_+\psi_n \in \mathbb{C}\psi_{n+2}$ und entsprechend erhalten wir $P_-\psi_n \in \mathbb{C}\psi_{n-2}$. Wir werden genauer zeigen, daß gilt

$$P_+\psi_n = (1+s+n)\psi_{n+2} \quad , P_-\psi_n = (1+s-n)\psi_{n-2}, \tag{1}$$

wobei jetzt $\chi = (s, m)$ ist. Diese Formel ergibt sich sehr einfach, wenn man die Koeffizienten α, β in der folgenden Ausdrücken bestimmt hat:

$$H\psi_n = \alpha\psi_{n+2} + \beta\psi_{n-2}$$

$$V\psi_n = -i\alpha\psi_{n+2} + i\beta\psi_{n-2}.$$

Man hat offensichtlich zu zeigen, daß

$$\alpha = (1 + s + n)/2, \quad \beta = (1 + s - n)/2 \tag{2}$$

Dazu genügt es, an der Stelle $1 \in G_\infty$ auszuwerten, eine leichte Rechnung zeigt

$$H\psi_n(1) = \lim_{\tau \longrightarrow 0} \frac{\psi_n(\exp(\tau H) - \psi_n(1)}{\tau} = 1 + s = \alpha + \beta$$

und

$$V\psi_n(1) = \lim_{\tau \longrightarrow 0} \frac{\psi_n(\exp(\tau V) - \psi_n(1)}{\tau} = -in = -i\alpha + i\beta.$$

(Die erste der beiden Formeln ist ganz trivial, für die zweite führt man am besten eine Rechnung mod höheren Potenzen von τ durch: Modulo höherer Potenzen in τ haben wir für die Iwasawa-Zerlegung

$$\exp(\tau V) = \begin{pmatrix} 1 & \tau \\ \tau & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\tau \\ \tau & 1 \end{pmatrix},$$

und dann ergibt sich

$$\psi_n(\exp(\tau V)) = (1 - i\tau)^n = 1 - in\tau,$$

und damit die behauptete Formel).

Jetzt können wir uns die Struktur der Moduln $\mathcal{I}_\chi$ sehr schön veranschaulichen:

$$\ldots \mathbb{C}\psi_{n-2} \underset{P_-}{\overset{P_+}{\rightleftarrows}} \mathbb{C}\psi_n \underset{P_-}{\overset{P_+}{\rightleftarrows}} \mathbb{C}\psi_{n+2} \ldots \tag{Diag}$$

zu jedem K-Typ der richtigen Parität gibt es eine Kopie von $\mathbb{C}$ und die Operatoren P_+, P_- schieben die Elemente eines K-Typs jeweils um einen Index hoch oder runter.

Weil nun jeder Untermodul eines Harish-Chandra Moduls wieder die direkte Summe seiner K-Typen ist, ist klar, daß der Modul $\mathcal{I}_\chi$ nur dann reduzibel sein kann, wenn es mindestens einen Index n gibt, an dem die Verbindung abbricht, d.h. an dem einer der Operatoren P_+ oder P_- gleich Null ist. Es sei also $\chi = (s, m)$, dann sind die autretenden K-Typen die $\mathbb{C}\psi_n$ mit $n \equiv m$ mod2. Daraus folgt:

A: Wenn für $\chi = (s, m)$ die folgende Bedingung

$$s \in m + 1 + 2\mathbb{Z}. \tag{red}$$

nicht erfüllt ist, dann sind $\mathcal{H}_\chi$ und $\mathcal{I}_\chi$ irreduzibel.

Wir nehmen also an, daß *(red)* erfüllt ist. Wir bemerken, daß für ein gegebenes χ es für jeden der Operatorn P_+ und P_- genau einen Index n gibt, an dem er verschwindet. Jetzt ist es günstig, verschiedene Fälle zu unterscheiden.

Wir fangen mit dem Fall $s = 0$ an. Dann ist $m = 1$ und wir sehen, daß in dem Diagramm

$$\ldots \mathbb{C}\psi_{-1} \underset{\underset{P_-}{\longleftarrow}}{\overset{\overset{P_+}{\longrightarrow}}{}} \mathbb{C}\psi_1 \ldots$$

die Pfeile P_+ und P_+ beide Null sind. Damit ist dann klar

B : Für $\chi = (0, 1)$ haben wir eine Zerlegung

$$\mathcal{I}_\chi = \left(\bigoplus_{n \equiv 1 \bmod 2, n<0} \mathbb{C}\psi_n \right) \oplus \left(\bigoplus_{n \equiv 1 \bmod 2, n>0} \mathbb{C}\psi_n \right) = \mathcal{I}_\chi^- \oplus \mathcal{I}_\chi^+$$

in zwei irreduzible unitäre Moduln

Jetzt nehmen wir an, daß $s > 0$. Weil jetzt s eine ganze Zahl ist, wollen wir $s = k - 1$ setzen. Dann sind die beiden Operatoren

$$P_+ : \mathbb{C}\psi_{-k} \longrightarrow \mathbb{C}\psi_{-k+2} \;\; \textit{und} \;\; P_- : \mathbb{C}\psi_k \longrightarrow \mathbb{C}\psi_{k-2}$$

Null, und daraus ergibt sich

C : Wenn (red) erfüllt ist und $s = k - 1 > 0$, dann enthält $\mathcal{I}_\chi$ zwei irreduzible Untermoduln

$$\mathcal{D}_k^+ = \bigoplus_{n \equiv m \bmod 2, n \geq k} \mathbb{C}\psi_n \;\; \textit{und} \;\; \mathcal{D}_k^- = \bigoplus_{n \equiv m \bmod 2, n \leq -k} \mathbb{C}\psi_n$$

Wenn wir setzen

$$\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_k^+ \oplus \mathcal{D}_k^-$$

dann ist $\mathcal{D}_k$ gerade der Kern des Homomorphismus

$$p_\chi : \mathcal{I}_\chi \longrightarrow \mathcal{M}_{k-2},$$

den wir in (4.1.5.4) *konstruiert haben. Die exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_k \longrightarrow \mathcal{I}_\chi \longrightarrow \mathcal{M}_{k-2} \longrightarrow 0$$

spaltet nicht als Sequenz von $(\mathfrak{g}, K)$-Moduln, der Modul $\mathcal{I}_\chi$ ist unzerlegbar.

Die Aussagen am Schluß ergeben sich zunächst einfach aus der Betrachtung der K-Typen. Die Tatsache, daß die Sequenz nicht spaltet, ergibt sich daraus, daß die Operatoren

$$P_- : \mathbb{C}\psi_{-(k-2)} \longrightarrow \mathbb{C}\psi_{-k} \;\; \textit{und} \;\; P_+ : \mathbb{C}\psi_{k-2} \longrightarrow \mathbb{C}\psi_k$$

gerade nicht verschwinden, die Pfeile in *(Diag)* zeigen an den Nullstellen (d.h. dort wo die Verbindung abbricht) nach innen.

Jetzt sei $s < 0$, wir setzen dann $k = -s + 1$. Dann ergibt sich ganz entsprechend wie in C:

D: Wenn (red) erfüllt ist, und wenn $s < 0$ und $k = -s + 1$, dann haben wir die Inklusion

$$i_\chi : \mathcal{M}_{k-2} \longrightarrow \mathcal{I}_\chi$$

und der Quotient von $\mathcal{I}_\chi$ nach $\mathcal{M}_n$ ist die direkte Summe zweier irreduzibler $(\mathfrak{g}, K)$-Moduln. Diese Moduln sind isomorph zu $\mathcal{D}_k^\pm$, die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_{k-2} \longrightarrow \mathcal{I}_\chi \longrightarrow \mathcal{D}_k^- \oplus \mathcal{D}_k^+ \longrightarrow 0$$

spaltet nicht, und $\mathcal{I}_\chi$ ist unzerlegbar.

Diese Aussage ist dual zu C, sie ergibt sich im wesentlichen durch die gleiche Argumentation. Hier ist nun der endlich dimensionale Modul der Untermodul, die Pfeile zeigen an den Nullstellen nach außen. Nicht ganz so offensichtlich ist dagegen die Aussage über die Struktur des Quotienten $\mathcal{I}_\chi/\mathcal{M}_{k-2}$. Um die eizusehen, bemühen wir noch einmal das Submodultheorem aus (4.1.4). Danach sind die beiden irreduziblen Summanden isomorph zu einem Untermodul eines $\mathcal{I}_\eta$, es ist klar, daß dann für η nur der Quasicharakter $-\chi$ in Frage kommt.

Damit ist auch klar, wie die G_∞-Moduln $\mathcal{H}_\chi$ aussehen, sie enthalten als einzige Untermoduln gerade die Abschlüsse der Untermoduln der $\mathcal{I}_\chi$.

4.1.6 Wir haben im Abschnitt 4.1.5 sehr weitgehende Einsichten in die Struktur der $(\mathfrak{g}, K)$-Moduln für unsere spezielle Gruppe erzielt. Wir kennen u.a. alle irreduziblen $(\mathfrak{g}, K)$-Moduln. Wir wollen in diesem Abschnitt die Frage untersuchen, welche dieser Moduln unitarisierbar sind, d.h. ein positiv definites, $(\mathfrak{g}, K)$- invariantes, hermitesches Skalarprodukt tragen.

Bislang wissen wir nur, daß die Moduln $\mathcal{I}_\chi$ und $\mathcal{H}_\chi$ ein solches Skalarprodukt besitzen, wenn χ unitär ist (Siehe 4.1.5.3). Bevor wir die gestellte Frage lösen können, müssen wir noch ein andere Frage untersuchen: wir müssen die Struktur der $(\mathfrak{t}, K^T)$-Moduln $\mathcal{I}_\chi/\mathfrak{u}\mathcal{I}_\chi$ ein wenig genauer verstehen. Dazu ist zu bemerken, daß wir diese Frage sehr leicht beantworten können, wenn wir die Frobeniusreziprozität und die Sätze über die Struktur der Moduln $\mathcal{I}_\chi$ ausnutzen. Das wäre aber ein unsystematischer Ansatz (Siehe 4.2).

Wir beginnen unsere Überlegungen damit, daß wir zwei lineare Abbildungen

$$L_1, L_\infty : \mathcal{I}_\chi/\mathfrak{u}\mathcal{I}_\chi \longrightarrow \mathbb{C}$$

konstruieren. Wir setzen

$$w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

und definieren für $f \in \mathcal{I}_\chi$

$$L_1(f) = f(1) \;\; und \;\; L_\infty(f) = \int_{U_\infty} f(wu)\, du,$$

wobei wir natürlich für die zweite Abbildung noch Konvergenzbetrachtungen anstellen müssen (kommt später). Zunächst bemerken wir, daß für $t \in T_\infty$ gilt

$$(tL_1)f = L_1(R_{t^{-1}}f) = f(t^{-1}) = t^{-\chi-\delta}f(1) = t^{-\chi-\delta}L_1(f).$$

(Dabei ist R_t die Rechtstranslation um t angewandt auf f). Das heißt aber doch, daß

$$L_1 : \mathcal{I}_\chi/\mathfrak{u}\mathcal{I}_\chi \longrightarrow \mathbb{C}_{\chi+\delta}$$

ein Homomorphismus von $(\mathfrak{t}, K^T)$-Moduln ist.

Für die Abbildung L_∞ gilt entsprechend

$$(tL_\infty)(f) = L_\infty(R_{t-1}f) = \int_{U_\infty} f(wut)$$

Setzen wir jetzt

$$t = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix},$$

dann wird das letzte Integral gleich

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(w\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix}\right) du = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\begin{pmatrix} t^{-1} & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t^2u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) du.$$

Nach Definition von $\mathcal{I}_\chi$ kann man nun den ersten Faktor im Argument von f mit $t^{-\chi-\delta}$ herausziehen, wenn man dann noch substituiert und t^2u wieder gleich u setzt, dann bekommt man

$$t^{\chi-\delta}\int_{-\infty}^{\infty} f(wu)\, du = t^{\chi-\delta}L_\infty(f).$$

Also ist

$$L_\infty \in \operatorname{Hom}_{(\mathfrak{t},K^T)}(\mathcal{I}_\chi/\mathfrak{u}\mathcal{I}_\chi, \mathbb{C}_{-\chi+\delta}).$$

Jetzt kommen wir zu den Konvergenzbetrachtungen für das Integral in der Definition von L_∞. Es ist

$$L_\infty(\psi_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n\left(w\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) du$$

und

$$w\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} & * \\ 0 & \sqrt{1+u^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-u}{\sqrt{1+u^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{1+u^2}} & \frac{-u}{\sqrt{1+u^2}} \end{pmatrix}$$

Also ist

$$\psi_n\left(w\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \sqrt{1+u^2}^{-s-1}\left(\frac{-u+i}{\sqrt{1+u^2}}\right)^n = \sqrt{1+u^2}^{-s-1-|n|}(-u \pm i)^{|n|}.$$

Wir haben also Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{1+u^2}^{-s-1-|n|} u^k\, du$$

auszuwerten, wobei dann $0 \leq k \leq |n|$. Für ungerades k wird das Integral Null, wenn k gerade ist können wir zweimal von Null bis unendlich integrieren. Wir setzen $1+u^2 = 1/v$ und das obige Integral wird

$$\int_0^1 v^{(s+|n|-k)/2-1}(1-v)^{(k+1)/2-1}\,dv = \frac{\Gamma((s+|n|-k)/2)\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma((s+|n|+1)/2)}.$$

Der Wert

$$L_\infty(\psi_n) = \sum_{k\equiv 0 \bmod 2, 0\leq k\leq |n|} \binom{|n|}{k}(\pm i)^{|n|-k}\frac{\Gamma((s+|n|-k)/2)\Gamma((k+1)/2)}{\Gamma((s+|n|+1)/2)}$$

ist also als Funktion in der Variablen χ eine meromorphe Funktion in der ganzen s-Ebene, sie hat höchstens Pole erster Ordung, möglicherweise einige Nullstellen und für $\mathrm{Re}\,(s) > 0$ ist das Intergral konvergent. Wir können also eine meromorphe Funktion $\Lambda(s)$ finden, so daß

$$\Lambda(s)L_\infty = \tilde{L}_\infty : \mathcal{I}_\chi \longrightarrow \mathbb{C}_{\delta-\chi}$$

für alle s definiert ist und nirgendwo die triviale Abbildung wird. Wir bekommen das folgende Resultat:

Für alle χ gibt es lineare Abbildungen zwischen $(\mathfrak{t}, K^T)$-Moduln

$$L_1 : \mathcal{I}_\chi/\mathfrak{u}\mathcal{I}_\chi \longrightarrow \mathbb{C}_{\chi+\delta}\ \ ,\ \ \tilde{L}_\infty : \mathcal{I}_\chi/\mathfrak{u}\mathcal{I}_\chi \longrightarrow \mathbb{C}_{-\chi+\delta}.$$

Diese Formen sind Eigenformen für die Operation von H, es gilt

$$HL_1 = (-1-s)L_1 \ \ \textit{und}\ \ H\tilde{L}_\infty = (-1+s)\tilde{L}_\infty,$$

diese Abbildungen sind für $s \neq 0$ als $\mathbb{C}$-wertige lineare Abbildungen linear unabhängig

Das folgt aus den vorangehenden Rechnungen, die beiden Formen werden in der Tat linear abhängig wenn $s = 0$ ist.

Bemerkungen 4.1.6.1: (a) Wenn $\chi = (0,0)$, dann ist der Modul $\mathcal{I}_\chi$ irreduzibel und es gilt, daß $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{t},K^T)}(\mathcal{I}_\chi/\mathfrak{u}\mathcal{I}_\chi, \mathbb{C})$ von der Dimension 1 ist. Wenn dagegen $\chi = (0,1)$ ist, dann ist $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{t},K^T)}(\mathcal{I}_\chi/\mathfrak{u}\mathcal{I}_\chi, \mathbb{C})$ von der Dimension 2, aber die Operation von $\mathfrak{t} = \mathbb{R}H$ darauf ist nicht mehr halbeinfach.

(b)Man bemerkt, daß die Eigenwerte von H auf dem Modul $\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{t},K^T)}(\mathcal{I}_\chi/\mathfrak{u}\mathcal{I}_\chi, \mathbb{C})$ gerade $2\mu_1, 2\mu_2$ sind. Ist das ein Zufall oder muß dies grundsätzlich so sein?

Wir wissen, daß der Operator $\tilde{L}_\infty$ über die Frobeniusreziprozität auch einen $(\mathfrak{g}, K)$-Homomorphismus

$$T_\chi : \mathcal{I}_\chi \longrightarrow \mathcal{I}_{-\chi}$$

induziert, er ist für alle χ ungleich Null. Man nennt solche Morphismen zwischen $(\mathfrak{g}, K)$-Moduln (oder auch sonstwie- Moduln) auch *Verkettungsoperatoren*. Es ist dann klar, daß T_χ die K-Typen auf sich abbildet, d.h. $T_\chi(\psi_n) = L_\infty(\psi_n)\psi_n$.(Hierbei muß man ein Auge zudrücken, denn die ψ_n liegen u.U. in verschiedenen Moduln). Die folgende Aussage ergibt sich sehr leicht aus unseren Einsichten in 4.1.5

Der Operator T_χ ist ein Isomorphismus, wenn die Bedingung (red) nicht erfüllt ist.

Jetzt sei (red) erfüllt, wir definieren k wie oben. Wenn $s = 0$ (also $\chi = (0, 1)$) dann ist T_χ ein Isomorphismus von I_χ. Ist dagegen $s > 0$, dann faktorisiert T_χ über den endlichdimensionalen Quotienten $\mathcal{M}_{k-2}$. Ist $s < 0$, dann ist der endlichdimensionale Untermodul $\mathcal{M}_{k-2}$ in $\mathcal{I}_\chi$ gerade der Kern von T_χ und T_χ induziert einen Isomorphismus

$$T_\chi{}^* : \mathcal{I}_\chi / \mathcal{M}_{k-2} \longrightarrow \mathcal{D}_k^+ \oplus \mathcal{D}_k^-$$

Die letzte Aussage ist vielleicht nicht ganz offensichtlich, wir kommen darauf noch einmal zurück.

Wir können jetzt die Frage nach der Unitarisierbarkeit der Harish-Chandra Moduln in diesem Fall beantworten. Natürlich muß für einen unitarisierbaren irreduziblen Modul der Eigenwert λ für den Casimirschen Operator stets reell sein. Nach Gleichung (2) in 4.1.5 folgt, daß s rein imaginär oder reell sein muß. Den ersten Fall haben wir schon erledigt, der ergibt ja gerade die Darstellungen der unitären Hauptserie (4.1.5.3). Für den Fall, daß s reell ist, kann man nun mit Hilfe des Verkettungsoperators T_χ ein hermitesches Skalarprodukt auf $\mathcal{I}_\chi$ konstruieren, man setzt für $f_1, f_2 \in \mathcal{I}_\chi$ einfach

$$< f_1, f_2 >= \Phi(f_1, \overline{T_\chi(f_2)}),$$

wobei Φ die in 4.1.5.2 konstruierte Paarung ist. Es ist ziemlich klar, daß ein irreduzibler Modul $\mathcal{I}_\chi$ genau dann unitarisierbar ist, wenn dieses Skalarprodukt bis auf einen Normierungsfaktor positiv definit ist. Man hat jetzt, daß

$$\overline{T_\chi(\psi_n)} = \overline{L_\infty(\psi_n)}\psi_{-n}$$

und da $\Phi(\psi_n, \psi_{-n}) = 1$, entscheiden die Faktoren $L_\infty(\psi_n)$ darüber, ob dies der Fall ist. Wenn man jetzt ein wenig rechnet, dann stellt man leicht fest, daß uns die obige Konstruktion (nach einer geeigneten Normierung) genau in den folgenden beiden Fällen ein positiv definites Skalarprodukt beschert:

(a) Es ist $m = 0$ und $0 \leq s < 1$ (Dies sind die Darstellungen der Nebenserie).

(b) Es ist $s \in 2\mathbb{Z} + m + 1$ (d.h. es gilt (red)) und $s < 0$. Dann wird durch

$$T_\chi^* : \mathcal{I}_\chi / \mathcal{M}_{k-2} \longrightarrow \mathcal{D}_k^+ \oplus \mathcal{D}_k^-$$

ein positiv definites Skalarprodukt auf dem Quotienten $\mathcal{I}_\chi / \mathcal{M}_n (\approx \mathcal{D}_k^+ \oplus \mathcal{D}_k^-)$ definiert. $\blacksquare$

Wir empfehlen dem Leser die teilweise ganz amüsanten Überlegungen zum Beweis dieser Aussagen durchzuführen. Man kann z.B. die Aussage (a) ohne Rechnung einsehen: Man geht einfach davon aus, dass man für $s = 0$ ein positiv definites Skalarprodukt hat, und dann lässt man s von Null nach eins wandern . Dabei bleiben die $L_\infty(\psi_n)$ reell und können das Vorzeichen nicht wechseln, weil der Modul irreduzibel bleibt. Das Argument bricht dann bei $s = 1$ zusammen.

Es ist ganz lustig zu sehen, warum das gleiche Argument im Fall $\chi = (0, 1)$ nicht klappt. Wichtig ist nun, dass die Moduln $\mathcal{D}_k^\pm$ unitarisierbar sind.

Damit haben wir in der Tat alle unitarisierbaren Moduln hingeschrieben. Ich möchte jetzt noch die Verbindung zu den Überlegungen im Anschluß an 4.1.2.1 herstellen. Wir haben dort gesehen, daß für $\lambda = (s^2-1)/4 > 0$ die Chancen für das Auftreten von unitarisierbaren Darstellungen sehr schlecht sind, denn einer der Terme in der asymptotischen Entwicklung ist unbeschränkt, die Matrixkoeffizienten einer unitären Darstellung müssen aber beschränkt sein.

Nun nehmen wir an, dass (red) gilt, es sei $s = \pm(k-1)$ mit $k \geq 2$. Der Modul I_χ hat einen Quotienten oder Untermodul, der isomorph zu $\mathcal{D}_k^+ \oplus \mathcal{D}_k^-$ ist und dessen Matrixkoeffizienten sind beschränkt, weil wir ein unitäres Skalarprodukt haben. Die Matrixkoeffizienten genügen aber derselben Differentialgleichung wie die Matrixkoeffizienten von I_χ. Also sehen wir, dass für diese speziellen Werte die leitenden Exponenten

$$\mu_{12} = \frac{1}{2} \pm \frac{k-1}{2}$$

sind. Für die Matrixkoeffizienten gilt dann

$$< \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \psi_k, \psi_k >= a^{1-\frac{k}{2}} F_1(a) + a^{\frac{k}{2}} F_2(a),$$

wobei die F_i konvergente Potenzreihen sind.

Ich behaupte, dass der erste Summand Null ist. Wenn $k > 2$, dann folgt diese Behauptung direkt daraus, dass dieser Term für $a \to 0$ unbeschränkt ist, falls er nicht Null ist. Da der zweite Term aber für $a \to 0$ gegen Null geht, ist der Matrixkoeffizient dann nicht beschränkt, das ist ein Widerspruch. Für $k = 2$ ist es nicht ganz so einfach. Wäre in diesem Fall der erste Term nicht Null, dann zeigt dasselbe Argument, dass für der Limes

$$\lim_{a \to 0} < \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \psi_k, \psi_k >= a_0$$

existiert und nicht Null ist. Das kann aber nur dann gelten, wenn $a_0 = 1$ und wenn $< \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \psi_k, \psi_k > \equiv 1$ (Übungsaufgabe) und das kann nicht sein.

Wir sehen also, dass für die Matrixkoeffizienten der Darstellungen $\mathcal{D}_k^\pm$ gilt

$$< \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \psi_k, \psi_k >= a^{1+\frac{k}{2}} F_2(a)$$

und wenn man sich noch überlegt, wie das Haarsche Mass auf G_∞ unter der Cartan Zerlegung aussieht, dann bekommmt man, dass die Matrixkoeffizienten der Darstellungen der diskreten Serie für $k = 2$ in $L^2(G_\infty)$ und für $k > 2$ sogar in $L^1(G_\infty)$ liegen.

Wir wollen jetzt annehmen, daß $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{R}) = G_\infty$ eine diskrete Untergruppe ist und daß der Quotient $\Gamma\backslash G_\infty$ kompakt ist. Dann zeigt ein Argument aus der Funktionalanalysis, daß der G_∞-Modul eine diskrete direkte Summe von irreduziblen Untermoduln ist, wobei jeder Isomorphietyp mit einer endlichen Vielfachheit $m(\pi)$, – diese kann natürlich auch Null sein – auftaucht. Beziechnen wir mit $\hat{G}_\infty^{(\text{unit})}$ die Menge der Isomorphieklassen von unitären Moduln, dann bekommen wir also

$$L^2(\Gamma\backslash G_\infty) = \overline{\bigoplus_{\pi \in \hat{G}_\infty} H_\pi^{m(\pi)}},$$

wobei H_π eine Realisierung des Isomorphietyps ist.

Wir wissen nun, daß die Menge dieser Isomorphietypen so aussieht: Sie ist eine diskunkte Vereinigung der Mengen

$$\begin{aligned}&\bigl\{\chi = (s,0) \mid s \in i\mathbb{R} \quad \text{oder} \quad -1 < s < 1\bigr\}/\{\pm\}\\ &\bigl\{\chi = (s,1) \mid s \in i\mathbb{R}\ ,\ s \neq 0\bigr\}/\{\pm\}\end{aligned}$$

wobei wir χ mit $-\chi$ identifizieren. Dann haben wir noch die Darstellungen

$$I^{\pm}_{(0,1)}$$

und die Darstellungen

$$\{\mathcal{D}^{\pm}_k\} \qquad k = 2, 3, \ldots .$$

Es ergibt sich dann die Frage für ein $\pi \in \hat{G}_\infty^{(\text{unit})}$ die Vielfachheit $m(\pi)$ zu bestimmen. Dazu möchte ich ein paar Bemerkungen machen.

Betrachten wir den Fall, daß $\pi = (s,0)$, ein realisierender Modul ist $\mathcal{H}_\chi$. Dann enthält $\mathcal{H}_\chi$ einen Vektor ψ_0 von trivialem K-Typ, d. h. wir können ψ_0 als Funktion auf $\Gamma\backslash\mathbb{H} = \Gamma\backslash G_\infty/K$ aufffassen. Jetzt wissen wir, daß der Casimir-Operator C auf $\mathcal{H}_\chi$ mit dem Eigenwert $\frac{s^2-1}{4}$ operiert. Wenden wir ihn auf ψ_0 an, dann wirkt der Summand $-Y^2$ als Null, weil ψ_0 unter K invariant ist, es bleibt also $\frac{1}{4}(H^2+V^2)$ und das ist einfach der Laplace-Operator auf $\Gamma\backslash\mathbb{H}$. Das heißt, ψ_0 ist eine Eigenfunktion für den Laplace-Operator

$$\Delta = y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

auf der oberen Halbebene.

Es gilt nun, daß die auftretenden Eigenwerte $\lambda = \frac{s^2-1}{4}$ eine diskrete Teilmenge von $(-\infty, 0)$ bilden, die Anzahl der Eigenwerte $\geq -T$ ist endliche. Es gibt asymptotische Formeln für die Anzahl der Eigenwerte mit Vielfachheit, wenn $T - \infty$ geht.

Ferner gibt es die Vermutung von Selberg, daß alle Eigenwerte $\leq -\frac{1}{4}$ sind, falls Γ eine “arithmetische” Untergruppe ist. Diese Vermutung kann man dann auch so formulieren, daß $\mathcal{H}_\chi$ nur dann in $L^2(\Gamma\backslash G_\infty)$ auftauchen kann, wenn $\mathcal{H}_\chi$ in der unitären Hauptserie liegt.

Ich komme nun zu den Darstellungen $\mathcal{D}^{\pm}_k$ mit $k = 1, 3, \ldots$, das sind die Darstellungen der diskreten Serie. Ein Teil der folgenden Überlegungen gilt auch noch für $I^{\pm}_{(0,1)}$, die ich in $\mathcal{D}^{\pm}_1$ umtaufen möchte. Die Matrixkoeffizienten von $\mathcal{D}^{\pm}_1$ sind nicht in $L^2(G_\infty)$, man nennt $\mathcal{D}^{\pm}_1$ die Limiten der diskreten Serie.

Wenn wir nun eine Einbettung

$$i : \mathcal{D}^{+}_k \longrightarrow L^2(\Gamma\backslash G_\infty)$$

haben, dann betrachten wir das Bild $i(\psi_k)$. Für $g \in G_\infty$ und $z \in \mathbb{H}$ setzen wir

$$j(g, z) = cz + d,$$

es gilt dann

$$j(g_1, g_2, z) = j(g_1, g_2, z) \cdot j(g_2, z).$$

Es gilt dann insbesondere $j(e(\varphi), i) = e^{-i\varphi}$. (Wir haven das Minuszeichen bei der Definition von $e(\varphi)$ in die linke untere Ecke geschrieben.) Wir setzen jetzt

$$\tilde{\psi}_k(g) = i(\psi_k)(g) \cdot j(g,i)^k$$

und stellen fest, daß $\tilde{\psi}_k(g)$ rechtsinvariant unter K ist. Wenn $gi = z$, dann setzen wir $\tilde{\psi}_k(g) = f_k(z)$.

Ist nun $\gamma \in \Gamma$, dann ist (immer noch $z = gi$)

$$\begin{aligned} f_k(\gamma z) &= f_k\left(\tfrac{az+b}{cz+d}\right) = i(\psi_k)(\gamma g) j(\gamma g, i)^k = \\ &= i(\psi_k)(g) j(\gamma, z)^k \cdot j(g,i)^k = f_k(z) \cdot j(g,i)^k \end{aligned}$$

also

$$f_k(\gamma z) = (cz+d)^k \cdot f_k(z).$$

Wir wissen nun auch noch, daß ψ_k von dem Operator P_- annulliert wird. Weil i ein Verkettungsoperator ist, gilt das auch für $i(\psi_k)$. Nun haben wir in der Einleitung zu diesem Text die Beziehungen zwischen der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ und den Differentialoperatoren erster Ordnung auf $\mathbb{H}$ beschrieben. Daraus ergibt sich ohne weitere Schwierigkeiten, daß

$$P_- i(\psi_k) = 0 \iff \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f_k = 0,$$

d. h. wir sehen, daß die obige Transformation $i(\psi_k) \mapsto f_k$ uns holomorphe Modulformen vom Gewicht k gibt.

Wenn wir nun eine holomorphe Modulform vom Gewicht k haben, dann können wir daraus eine Γ-invariante Funktion ψ_k machen, die von P_- annulliert wird. Wendet man dann G_∞ von rechts auf ψ_k an, dann sieht man leicht, daß man eine Kopie von $\mathcal{D}_k^+$ in $L^2(\Gamma\backslash G_\infty)$ erhält.

Wir sehen also, daß für die Multiplizität gilt

$$m(\mathcal{D}_k^+) = \dim \mathcal{M}_k(\Gamma),$$

wobei rechts der Raum der holomorphen Modulformen vom Gewicht k steht. Macht man das mit $m(\mathcal{D}_k^-)$, dann erhält man den Raum der antiholomorphen Modulformen. Natürlich bekommt man durch komplexes Konjugieren

$$m(\mathcal{D}_k^-) = m(\mathcal{D}_k^+).$$

Wenn wir nun für $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$ nehmen, dann ist $\Gamma\backslash G_\infty$ nicht kompakt. Man definiert den Teilraum $L_0^2(\Gamma\backslash G_\infty)$ der Spitzenformen, und wir haben den Satz von Gelfand/Graev, daß

$$L_0^2(\Gamma\backslash G_\infty) = \bigoplus_{\pi \in \hat{G}_\infty^{(\mathrm{unit})}} H_\pi^{m_0(\pi)}.$$

Auch auf der Seite der holomorphen Modulformen vom Gewicht k hat man das Konzept der Spitzenformen, es ist dann so, daß

$$L_0^2(\Gamma\backslash G_\infty) = \bigoplus_{\pi \in \hat{G}_\infty^{(\mathrm{unit})}} H_\pi^{m_0(\pi)}.$$

Auch auf der Seite der holomorphen Modulformen vofm Gewicht k hat man das Konzept der Spitzenformen. Es ist dann so, daß eine Kopie von $\mathcal{D}_k^+$ in $L_0^2(\Gamma\backslash G_\infty)$ uns eine holomorphe Spitzenform vom Gewicht k auf $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ liefert. Wir bekommen also

$$m_0(\pi) = m_0(\mathcal{D}_k^+, \Gamma) = \dim\ \mathcal{S}_k(\Gamma\backslash\mathbb{H}).$$

Es gibt nun Methoden, diese Vielfachheiten zu bestimmen. Dazu bleiben wir im Fall des kompakten Quotienten.

Es gibt zwei scheinbar völlig verschiedene Vorgehensweisen. Wir können Modulformen als Schnitte in Linienbündeln $\mathcal{L}_k$ interpretieren. Dann wenden wir den Satz von Riemann-Roch an, um die Dimension des Raumes dieser Schnitte zu bestimmen. Dazu muß man die Grade dieser Linienbündel kennen.

Die andere Vorgehensweise besteht darin, daß man die Selbergsche Spurformel anwendet. Hierbei betrachtet man auf $L^2(\Gamma\backslash G_\infty)$ die Faltung mit einem Matrix koeffizienten. Man bildet den Endomorphismus

$$\prod_{k,k} : f(x) \longmapsto \int_{G_\infty} \overline{\langle g\psi_k, \psi_k\rangle} f(xg) dg.$$

Hier muß man sich schon überlegen, ob man das darf, denn bislang haben wir nur die Faltung mit Funktionen aus $\mathcal{C}_{\infty,c}(G_\infty)$ betrachtet. Wir wollen in den folgenden Überlegungen die Konvergenzüberlegungen mit einer gewissen Sorglosigkeit durchführen und nur dann mahnend den Zeigefinger heben, wenn es wirklich nicht geht.

Unser Ziel ist zu zeigen, daß dieser Endomorphismus bis auf einem von Null verschiedenen Faktor der Projektor von $L^2(\Gamma\backslash G_\infty)$ auf den k-isotypischen Anteil des G_∞-isotypischen Teilraums $H([\mathcal{D}_k^+])$ ist, das ist der Teilraum derjenigen Funktionen, für die $f(ge(\varphi)) = f(g)e^{ik\varphi}$ ist. Das kann man auch so sehen, daß der Endomorphismus auf dem orthogonalen Komplement des Teilraums

$$H([\mathcal{D}_k^+])(k)$$

Null ist und auf diesem Teilraum ein von Null verschiedener Skalar.

Wir schreiben f als Summe von Funktionen f_π, wobei f_π die Komponente im π-isotypischen Teilraum ist. Dann wird unser Endomorphismus

$$f(x) \longrightarrow \sum_\pi \int_{G_\infty} \overline{\langle g\psi_k, \psi_k\rangle}\ f^{(\pi)}(xg) dg.$$

Wenn wir nun wissen wollen, was auf der einzelnen isotypischen Komponente passiert, wählen wir ein $\varphi \in H(\pi)$ (das ist der isotypische Anteil zu π, also $H(\pi) \simeq H_\pi^{m(\pi)}$) und bemerken, daß das Skalarprodukt der rechten Seite mit φ gleich

$$\int_{G_\infty} \overline{\langle g\psi_k, \psi_k\rangle} \langle f^{(\pi)}(xg), \varphi(x)\rangle_{L^2(\Gamma\backslash G_\infty)}\ dg$$

ist, wobei das erste Skalarprodukt das gewählte Skalarprodukt auf $\mathcal{D}_k^+$ ist und das Hilbertraum Skalarprodukt ist. Jetzt ist dies ein Skalarprodukt zwischen zwei

Matrixkoeffizienten. Wann ist das eine sinnvolle Bildung? Wir kennen ja das Wachstum der Matrixkoeffizienten, wenn $k \geq 3$ dann fallen sie so schnell ab, daß dieses Skalarprodukt konvergiert. Wenn $k = 2$, dann gilt dies auch noch, es sei denn, es ist π die eindimensionale triviale Darstellung. Wenn $k = 1$, dann ist das Integral nicht konvergent. Wir können in diesem Fall nichts machen.

Es sei also nun $k \geq 2$ und daß f auf den konstanten Funktionen senkrecht steht. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{\pi} \quad & \int_{G_\infty} \overline{\langle g\psi_k, \psi_k\rangle}\ \langle f^{(\pi)}(xg), \varphi(x)\rangle_{L^2(\Gamma\backslash G_\infty)}\ dg \\ &= \int_{G_\infty} \overline{\langle g\psi_k, \psi_k\rangle}\ \langle f^{([\mathcal{D}_k^+])}(xg), \varphi(x)\rangle_{L^2(\Gamma\backslash G_\infty)} dg\end{aligned}$$

Es ist klar, daß dieses Integral Null ist, wenn f senkrecht auf den Elementen vom K-Typ $e^{ik\varphi}$ steht, das ist schon ein Teil der Behauptung. Es sei also f in dem isotypischen Teilraum $H([\mathcal{D}_k^+])(k)$.

Wir wählen jetzt eine Identifizierung

$$\alpha : (\mathcal{D}_k^+)^{m([\mathcal{D}_k^+])} \xrightarrow{\sim} H([\mathcal{D}_k^+]),$$

wobei die linke direkte Summe orthogonal sei und α sei eine Isometrie. Dann wählen wir als Testfunktion φ die Funktion $\psi_k^{(\nu_0)} = \alpha(0, \dots, 0, \psi_k, 0, \dots, 0)$, wobei ψ_k an der ν_0-ten Stelle steht.

Ist dann – mit derselben Notation – $f^{(\mathcal{D}_k^+)} = \sum x_\nu \psi_k^{(\nu)}$, dann wird

$$\langle f^{(\mathcal{D}_k^+)}(xg), \psi_k^{(\nu)}(x)\rangle_{L^2(\Gamma\backslash G_\infty)} = \sum c_\nu \langle \psi_k^{(\nu)}(xg), \psi_k^{(\nu_0)}(x)\rangle_{L^2(\Gamma\backslash G_\infty)} = c_{\nu_0}\langle g\psi_k, \psi_k\rangle,$$

wobei wir im letzten Schritt ausnutzen, daß α eine Isometrie ist. Also wird unser Integral

$$c_{\nu_0} \int \overline{\langle g\psi_k, \psi_k\rangle} \langle g\psi_k, \psi_k\rangle dg = c_{\nu_0} \cdot d(k),$$

wobei $d(k)$ der formale Grad der Darstellung ist. Daraus ergibt sich die Behauptung, nämlich, daß

$$f(x) \longmapsto \int_{G_\infty} \overline{\langle g\psi_k, \psi_k\rangle} f(xg) dg$$

bis auf den Faktor $d(k)$ der Projektor auf den Teilraum $H(\mathcal{D}_k^+)(k)$ ist. Wenn $k = 2$ ist, sollten wir annehmen, daß f senkrecht auf den konstanten Funktionen ist. Auf der anderen Seite kann man schon sagen, daß

$$\int_{G_\infty} \overline{\langle g\psi_k, \psi_k\rangle} dg = 0$$

ist, weil der K-Typ nicht trivial ist.

Wir können unserem Projektor $\prod_{k,k}$ eine Spur zuordnen, das ist in diesem Fall natürlich einfach die Zahl $d(k) \cdot \dim H(\mathcal{D}_k^+)(k)$.

Nun schreiben wir den Projektor etwas anders. Es ist

$$\prod_{k,k}(f)(x) = \int_{G_\infty} \overline{\langle g\psi_k, \psi_k\rangle} f(xg) dg,$$

und nach einer Substitution erhalten wir für das Integral

$$\int_{G_\infty} \overline{\langle x^{-1} g \psi_k, \psi_k \rangle} f(g) dg.$$

Die Funktion f ist von links unter Γ invariant, dann ist das Integral gleich

$$\int_{\Gamma \backslash G_\infty} \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} \overline{\langle x^{-1} \gamma g \psi_k, \psi_k \rangle} \right) f(g) dg,$$

und die Summe im Innern ist nun eine Kernfunktion auf $\Gamma \backslash G_\infty \times \Gamma \backslash G_\infty$

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \overline{\langle x^{-1} \gamma g \psi_k, \psi_k \rangle} = K(x, g),$$

und die Spur des Operators wird dann durch das Integral über die Diagonale gegeben, d. h.

$$\mathrm{Spur}(\prod_{k,k}) = \int_{\Gamma_\infty \backslash G} K(x, x) dx = \int_{\Gamma_\infty \backslash G} \sum_{\gamma \in \Gamma} \overline{\langle x^{-1} \gamma x \psi_k, \psi_k \rangle} dx.$$

Die Summe wird nun nach Konjugationsklassen sortiert. Dann bekommen wir

$$\int_{\Gamma_\infty \backslash G} \sum_{\langle \gamma \rangle \in \Gamma / \sim} \left(\sum_{u \in \Gamma / \Gamma_\gamma} \overline{\langle x^{-1} u^{-1} \gamma u x \psi_k, \psi_k \rangle} \right) dx,$$

wobei Γ_γ der Zentralisator von γ in Γ ist. Jetzt ist aber die innere Summe als Funktion in der Variablen x links invariant unter Γ, also können wir die Summation über die Konjugationsklassen nach draußen ziehen und bekommen

$$\sum_{\langle \gamma \rangle} \int_{\Gamma_\infty \backslash G} \sum_{u \in \Gamma / \Gamma_\gamma} \overline{\langle x^{-1} u^{-1} \gamma u x \psi_k, \psi_k \rangle} dx.$$

Jetzt ist das gleich

$$\sum_{\langle \gamma \rangle} \int_{\Gamma_\gamma \backslash G_\infty} \overline{\langle x^{-1} \gamma x \psi_k, \psi_k \rangle} dx$$

und der Integrand ist jetzt von links invariant unter dem Zentralisator $G_{\infty,\gamma}$ von γ in G_∞ und dann wird der Ausdruck

$$\mathrm{Spur}(\prod_{k,k}) = \sum_{\langle \gamma \rangle} \mathrm{vol}_{d_{G_{\infty,\gamma}}}(\Gamma_\gamma \backslash G_{\infty,\gamma}) \cdot \int_{G_{\infty,\gamma} \backslash G_\infty} \overline{\langle \tilde{x}^{-1} \gamma \tilde{x} \psi_k, \psi_k \rangle} d_\gamma \tilde{x},$$

wobei jetzt das Harasche Maß auf G_∞ die Bedingung $dx = d_{G_{\infty,\gamma}} \cdot d_\gamma \tilde{x}$ erfüllen muß ($\tilde{x}$ ist die Variable auf $G_{\infty,\gamma} \backslash G_\infty$). Das ist nun ein typischer Ausdruck wie er in einer Spurformel auftaucht: Wir bekommen eine Summe über die Konjugationsklassen von Elementen in Γ. Der Beitrag einer Konjugationsklasse $\langle \gamma \rangle$ zu der Summe ist ein

Volumenfaktor mal einem sogenannten Bahnenintegral (oder orbitalem Integral), das ist das Integral über eine Konjugationsklasse in G_∞. In unserem Fall ist das

$$\int_{G_{\infty,\gamma}\backslash G_\infty} \overline{\langle \tilde{x}^{-1}\gamma\tilde{x}\psi_k, \psi_k\rangle} d_\gamma \tilde{x}.$$

Nun kommt es auf die Auswertung der Bahnenintegrale hinaus. Da gibt es nun den Satz, daß diese Bahnenintegrale – für diese besonderen Funktionen – verschwinden, wenn γ nicht elliptisch ist, d. h. wenn γ nicht in einer maximal kompakten Untergruppe liegt. Ist nun umgekehrt $\gamma \in \Gamma$, so ist nach Definition $\gamma \in \Gamma \cap K'$, wobei K' maximal kompakt ist. Dann ist aber $\Gamma \cap K'$ eine endliche Gruppe, weil sie diskret und kompakt ist. Also ist auch γ ein Element endlicher Ordnung. Umgekehrt ist natürlich ein Element endlicher Ordnung auch elliptisch.

Man kann nun zeigen, daß eine solche (arithmetische?) Gruppe Γ nur endlich viele Konjugationsklassen von Elementen endlicher Ordnung enthält, die Summe für die Spur von $\prod_{k,k}$ wird dann endlich. Es gibt noch einen Satz von Selberg, der garantiert, daß es eine Untergruppe $\Gamma' \subset \Gamma$ gibt, die endlichen Index in Γ hat und deren einziges Element endlicher Ordnung e ist. Man nennt eine solche diskrete Untergruppe torsionsfrei.

Wenn nun Γ auch noch torsionsfrei ist, dann wird unsere Formel einfach

$$\mathrm{Spur}(\prod_{k,k}) = d(k) \dim\ H([\mathcal{D}_k^+])(k) = \mathrm{vol}(\Gamma\backslash G_\infty).$$

Hier ist nun ein Augenblick der Meditation angebracht.

Wir haben auf G_∞ ein Haarsches Maß dx gewählt, bezüglich dem wir das Volumen berechnen. Aber das Haarsche Maß ist nicht eindeutig.

Die Wahl des Haarschen Maßes geht aber auch bei der Berechnung des formalen Grades ein $d(k)$. Es war

$$\int_{G_\infty} \overline{\langle g\psi_k, \psi_k\rangle}\langle g\psi_k, \psi_k\rangle dg = d(k)\langle \psi_k, \psi_k\rangle\overline{\langle \psi_k, \psi_k\rangle} = d(k),$$

und wir sehen, daß sich die Wahl des Haarschen Maßes heraushebt.

Es bleiben also die Berechnung vofn $d(k)$ und $\mathrm{vol}(\Gamma\backslash G_\infty)$ bezüglich eines Haarschen Maßes. Darauf will ich hier nicht eingehen.

Obwohl wir diesen Punkt nicht weiter vertiefen, können wir doch einige Informationen aus der Formel ableiten.

Wenn wir eine Untergruppe $\Gamma_i \subset \Gamma$ von endlichem Index wählen, dann ist offensichtlich

$$\mathrm{vol}(\Gamma_1\backslash G_\infty) = [\Gamma : \Gamma_1] \cdot (\Gamma\backslash G_\infty),$$

d. h. die Multiplizität multipliziert sich mit dem Index.

Zurück zum Riemann-Roch

Wenn $\Gamma\backslash G_\infty$ torsionsfrei ist, dann ist

$$\Gamma\backslash G_\infty/K = \Gamma\backslash\mathbb{H}$$

eine kompakte Riemannsche Fläche. Wir definieren Linienbündel

$$\mathcal{L}_k(U) = \{f : \pi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbb{C} \mid f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z)\}$$

wobei f natürlich holomorph sein soll. Es ist klar, daß $\mathcal{L}_{k_1} \otimes \mathcal{L}_{k_2} \simeq \mathcal{L}_{k_1+k_2}$, und es ist klar, daß $\mathcal{L}_2 = \Omega_{\Gamma\backslash\mathbb{H}}$ das Bündel der holomorphen Differentiale ist. Daraus folgt, daß

$$\mathrm{grad}(\mathcal{L}_k) = k(g-1)$$

und

$$\begin{aligned}&\dim H^0(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{L}_k) - \dim H^0(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{L}_{-k} \otimes \mathcal{L}_2) = \\ &\dim H^0(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{L}_k) - \dim H^0(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{L}_{-k+2}) = k(g-1) + 1 - g.\end{aligned}$$

Für $k = 1$ ist die Formel ohne jeden Informationsgehalt.

Für $k = 2$ sagt sie uns

$$\dim H^0(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \Omega^1_{\Gamma\backslash\mathbb{H}}) - \dim H^0(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{O}_{\Gamma\backslash\mathbb{H}}) = 2(g-1) + 1 - g = g - 1,$$

und wir bekommen

$$\dim H^0(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \Omega^1_{\Gamma\backslash\mathbb{H}}) = g,$$

was wohlbekannt ist.

Für $k > 2$ bekommen wir dann

$$\dim \mathbb{H}^0(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mathcal{L}_k) = (k-1)(g-1).$$

Wir sehen nun, daß $g - 1$ dem Volumenfaktor entspricht und daß

$$d(k) = \frac{1}{k-1}$$

nach geeigneter Wahl des Haarschen Maßes. (Das ist auch konsistent damit, daß $k = 1$ nicht mitspielen darf.)

Der Faktor $g - 1$ verhält sich nach dem Satz von Hurwitz wie erwartet, wenn wir zu einer Untergruppe vom endlichen Index übergehen. Es ist

$$(g' - 1) = [\Gamma : \Gamma'](g - 1).$$

Im Fall $k = 2$ war unsere Herleitung der Spur von $\prod_{k,k}$ nicht legal, weil $\langle g\psi_2, \psi_2\rangle \notin L^1(G_\infty)$. Aber es ist möglich, die Rechnung so durchzuführen, daß am Ende ein $+1$ auf der rechten Seite hinzukommt.

4.1.7 *Die Kohomologie von Harish-Chandra Moduln*: In diesem Abschnitt wollen wir die Kohomologie der oben betrachteten Harish-Chandra-Moduln studieren. Wir beginnen mit einer allgemeinen Bemerkung. Es sei $\mathcal{V}$ ein beliebiger Harish-Chandra-Modul aber mit zentralem Charakter, d.h. $Cv = \lambda v$ für alle v aus $\mathcal{V}$. Wir interessieren uns für die Kohomologie

$$H^\cdot(\mathfrak{g}, K, \mathcal{V} \otimes \mathcal{M}_n) = \mathrm{Hom}_K(\Lambda^\cdot(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \mathcal{V} \otimes \mathcal{M}_n).$$

Wir kennen den zentralen Charakter von $\mathcal{M}_n$, er ist in der jetzigen Normierung durch

$$CP = \frac{n^2+2n}{4}P = \frac{(n+1)^2-1}{4}P \quad \text{für} \quad \text{alle } P \in \mathcal{M}_n$$

gegeben. Wenn also die zu betrachtende Kohomologie nicht verschwinden soll, dann müssen wir annehmen, daß $\lambda = ((n+1)^2-1)/4$, und das erzwingt, daß die Kompositionsfaktoren in $\mathcal{V}$ alle in $\mathcal{I}_\chi$ mit $\chi = (\pm(n+1), m)$ enthalten sind. Das heißt, daß wir uns nur für diese speziellen $\mathcal{I}_\chi$ und ihre Kompositionsfaktoren interessieren müssen, wenn wir die Kohomologie mit Koeffizienten in $\mathcal{M}_n$ studieren wollen.

Eine weitere Restriktion bekommen wir durch die Betrachtung der vorkommenden K-Typen. Wir haben

$$\Lambda^\cdot(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}) = \mathbb{C} \oplus \mathfrak{g}/\mathfrak{k} \oplus \Lambda^2(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}).$$

Wir haben schon gesehen, daß die in dieser Summe auftretenden K-Typen $0, \{2,-2\}, 0$ sind. In $\mathcal{M}_n$ tauchen aber gerade die K-Typen $n, n-2, \ldots, -n$ auf. Wenn wir also wollen, daß

$$\mathrm{Hom}_K(\Lambda^\cdot(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \mathcal{V} \otimes \mathcal{M}_n) \neq 0,$$

dann müssen in $\mathcal{V}$ auch K-Typen mit der Parität von n auftauchen. Wir brauchen also nur solche $\mathcal{V}$ zu betrachten, die Kompositionsfaktoren in $\mathcal{I}_\chi$ haben, wobei $\chi = (\pm(n+1), n)$, d.h. es gilt *(red)*. Uns interessieren also im wesentlichen die Fälle $\mathcal{V} = \mathcal{I}_\chi$, $\mathcal{D}_k^\pm$, $\mathcal{M}_n$. Als erstes zeigen wir

$$H^p(\mathfrak{g}, K, \mathcal{D}_k^\pm \otimes \mathcal{M}_n) = \left\{ \begin{matrix} 0 & p = 0,2 \\ \mathbb{C} & p = 1 \end{matrix} \right. .$$

Dazu betrachtet man einfach den Komplex $\mathrm{Hom}_K(\Lambda^\cdot(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \mathcal{D}_k^\pm \otimes \mathcal{M}_n)$. Eine einfache Betrachtung der K-Typen zeigt, daß in $\mathcal{D}_k^+ \otimes \mathcal{M}_n$ (bzw.$\mathcal{D}_k^- \otimes \mathcal{M}_n$) die K-Typen von 2 bis $+\infty$ (bzw. von -2 bis $-\infty$) auftauchen. Also haben wir in den Graden $0, 2$ keinen gemeisamen K-Typ mit $\Lambda^\cdot(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$, im Grad eins taucht auf jeder Sete genau ein gemeinsamer K-Typ genau einmal auf. Das zeigt die Behauptung.

Wir haben schon früher darauf hingewiesen, daß

$$H^\cdot(\mathfrak{g}, K, \mathcal{D}_k \otimes \mathcal{M}_n) = \mathrm{Ext}^1_{(\mathfrak{g},K)}(\mathcal{M}_n, \mathcal{D}_k^\pm)$$

(Siehe 3.7.11.3 und B-W , I,2.5). Dann ist also diese Ext^1- Gruppe gleich $\mathbb{C}$ und die nicht triviale Erweiterungsklasse bekommen wir sogar frei Haus, wenn wir $\mathcal{I}_\chi$ durch einen der Moduln $\mathcal{D}_k^\pm$ teilen. Der enstehende Quotient ergibt dann die nichtriviale Erweiterung für den andern Modul.

Nun wollen wir uns die Kohomologie der endlich dimensionalen Moduln $\mathcal{M}_n$ ansehen. Natürlich ist $\mathbb{C}$ mit der trivialen Aktion von $(\mathfrak{g}, K)$ auch ein Harish-Chandra-Modul und es ist $\mathcal{M}_n = \mathbb{C} \otimes \mathcal{M}_n$, wenn wir darauf das Lemma von Wigner anwenden, dann sehen wir

Es gilt

$$H^\cdot(\mathfrak{g}, K, \mathcal{M}_n) = 0 \quad \textit{falls} \quad n \neq 0$$

und

$$H^q(\mathfrak{g}, K, \mathbb{C}) = \begin{cases} \mathbb{C} & q = 0, 2 \\ 0 & q = 1 \end{cases}.$$

Die erste Aussage gilt, weil der zentrale Charakter on $\mathbb{C}$ trivial ist und der von $\mathcal{M}_n$ für $n \neq 0$ nicht. Die zweite Aussage ergibt sich sofort aus der obigen Bestimmung der K-Typen in $\Lambda^\cdot(\mathfrak{g}/\mathfrak{k})$.

Bemerkung 4.1.7.1: Wir sehen, daß die Kohomologie $H^\cdot(\mathfrak{g}, K, \mathbb{C})$ mit der Kohomologie des eindimensionalen projektiven Raums $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ übereinstimmt. Das ist kein Zufall, sondern der Spezialfall eines allgemeinen Satzes. Der $\mathbf{P}^1(\mathbb{C})$ ist der kompakte Zwilling zu der oberen Halbebene, d.h. wenn wir die Konstruktion aus 3.7.14.1 hier durchführen, dann wird $G_c = SU(2)$ und $G_c/K = \mathbf{P}^1(\mathbb{C})$. Man kann sich nun leicht klar machen, daß die Kohomologie dieses kompakten Zwillings gerade gleich $H^\cdot(\mathfrak{g}_c, K, \mathbb{C})$ ist (Siehe *****), dann ergibt sich die behauptete Gleichheit aus $\mathfrak{g}_c \otimes \mathbb{C} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$.

Ich erinnere jetzt an die sogenannte Clebsch-Gordan Formel. Sind n, m zwei natürliche Zahlen und ist $r = |n - m|$, dann ist

$$\mathcal{M}_n \otimes \mathcal{M}_m = \mathcal{M}_r \oplus \mathcal{M}_{r+2} \cdots \mathcal{M}_{n+m}$$

(Siehe ****).

Es sei nun $\chi = (n+1, n)$, wir haben dann eine exakte Sequenz (Siehe 4.1.6 *C*)

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}_k^+ \oplus \mathcal{D}_k^- \longrightarrow \mathcal{I}_\chi \longrightarrow \mathcal{M}_n \longrightarrow 0.$$

aus der eine lange exakte Sequenz für die Kohomologie resultiert. Die schreibe ich jetzt hin, wobei ich aber schon die mir bekannten Kohomologiegruppen einsetze:

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow H^0(\mathfrak{g}, K, \mathcal{I}_\chi \otimes \mathcal{M}_n) \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \\ \longrightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \longrightarrow H^1(\mathfrak{g}, K, \mathcal{I}_\chi \otimes \mathcal{M}_n) \longrightarrow 0 \longrightarrow \\ \longrightarrow H^2(\mathfrak{g}, \mathcal{I}_\chi \otimes \mathcal{M}_n) \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0. \end{gathered}$$

Nun behaupte ich, daß

$$H^0(\mathfrak{g}, K, \mathcal{I}_\chi \otimes \mathcal{M}_n) = 0,$$

denn ein von Null verschiedener invarianter Vektor in $\mathcal{I}_\chi \otimes \mathcal{M}_n$ wäre ja auch eine invariantelineare Abbildung von $\mathcal{M}_n$ nach $\mathcal{I}_\chi$, das kann es nach 4.1.5 *C* nicht geben. Also ergibt sich aus der obigen exakten Sequenz

$$H^\cdot(\mathfrak{g}, K, \mathcal{I}_\chi \otimes \mathcal{M}_n) = \begin{cases} 0 & p = 0 \\ \mathbb{C} & p = 1, 2 \end{cases}.$$

Die gleiche Überlegung können wir in der dualen Situation anwenden, d.h. im Fall $\chi = (-n-1, n)$. Dann erhalten wir

$$H^\cdot(\mathfrak{g}, K, \mathcal{I}_\chi \otimes \mathcal{M}_n) = \begin{cases} \mathbb{C} & p = 0, 1 \\ 0 & p = 2 \end{cases}.$$

Damit haben wir für eine ganze Reihe von $(\mathfrak{g}, K)$-Moduln die Kohomologie berechne. Insbesondere kennen wir die Kohomologie der unitären $(\mathfrak{g}, K)$-Moduln, was ja im Hinblick auf den Satz von Eichler Shimura wichtig ist. Im Sinne von 3.7.12.4 besteht $\mathrm{Coh}(\mathcal{M}_n)$ aus den beiden Darstellungen $\mathcal{D}_k^+, \mathcal{D}_k^-$, falls $n \neq 0$, im Fall $n = 0$ kommt dazu dann noch die triviale Darstellung $\mathbb{C}$.

4.2 *Die Darstellungstheorie allgemeiner reduktiver Gruppen*: Ich habe das Beispiel aus dem vorangenden Abschnitt so weitgehend durchgerechnet, weil es mancherlei Hinsicht schon wesentliche Aspekte für den allgemeinen Fall enthält. Das soll im Folgenden kurz erläutert werden, vorher muß ich aber noch einige Tatsachen aus der Theorie der reduktiven Gruppen erwähnen, die für die Formulierung der Ergebnisse wichtig sind. Dabei werde ich keine genauen Referenzen geben, sondern auf die vielen Bücher zu diesem Gegenstand verweisen, auf die ich schon früher hingewiesen habe.

4.2.1 *Einiges zur Theorie der Tori*: Es sei für den Moment mal k ein beliebiger Körper. Mit G_m/k bezeichnen wir die multiplikative Gruppe (siehe II,2.1 es ist die algebraische Gruppe Gl_1/k). Eine lineare algebraische Gruppe T/k heißt zerfallender Torus über k, wenn sie zu G_m^r/k isomorph ist. Eine Gruppe T/k heißt Torus, wenn es eine endliche Erweiterung L/k gibt, so daß $T \times_k L$ ein zerfallender Torus ist. Über einem algebraisch abgeschlossenen Körper ist also jeder Torus zerfallend.

Beispiel : Wir haben in 2.1 die Konstruktion der Restriktion der Skalare erläutert. Es ist eine sehr nützliche Übung sich klar zu machen, daß für eine endliche separable Erweiterung L/k die Restriktion $T = R_{L/k}G_m$ ein Torus über k ist für den gilt $T(k) = L^*$ oder allgemeiner

$$T(F) = (F \otimes L)^* \text{ für } \quad \textit{jede Erweiterung } F/k$$

Wenn T/k ein zerfallender Torus ist, und wenn

$$\rho : T \longrightarrow Gl(V)$$

eine rationale Darstellung ist, dann kann man diese Darstellung vollständig in irreduzible Darstellungen zerlegen, diese irreduziblen Darstellungen sind von der Dimension 1 und durch einen Charakter $\gamma : T \longrightarrow G_m$ gegeben. Die Menge dieser Charaktere bezeichnet man mit

$$X(T) = \mathrm{Hom}(T, G_m).$$

Wenn $T/k = G_m^r$ dann sind die Charaktere von der Form $\gamma : (x_1, x_2, \cdots, x_r) \longrightarrow x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_r^{m_r}$. Sie bilden also eine zu $\mathbb{Z}^r$ isomorphe abelsche Gruppe. Ist T/k ein beliebiger Torus, der über einer normalen Erweiterung L/k zerfällt, dann setzt man $X(T) = X(T \times_k L)$, dann wird $X(T)$ ein Modul für die Galoisgruppe $Gal(L/k)$.

Man nennt einen Torus T/k *anisotrop (über k)*, wenn T/k keinen über k definierten, nichttrivialen, zerfallenden Untertorus besitzt. Jeder Torus T/k besitzt einen maximalen anisotropen Teiltorus T_1/k und einen maximalen zerfallenden Teiltorus S/k, die durch die Multiplikation

$$T_1 \times_k S \longrightarrow T$$

definierte Abbildung ist eine Isogenie, d.h. sie ist surjektiv (im Sinne der algebraischen Geometrie, d.h. wenn $\overline{k}$ ein algebraischer Abschluß von k ist, dann ist sie auf den $\overline{k}$-wertigen Punkten surjektiv) und sie hat einen endlichen Kern. Wir schreiben dafür

$$T = T_1 \cdot S.$$

Wir betrachten jetzt Tori über $\mathbb{R}$, da ist zunächst einmal der Torus $\mathcal{S}/\mathbb{R} = R_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(G_m)$, dies ist ein Torus der Dimension 2 Über $\mathbb{R}$. Wir haben einenüber $\mathbb{R}$ definierten Charakter $N : \mathcal{S} \longrightarrow G_m$, der auf den $\mathbb{R}$-wertigen Punkten $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \mathbb{C}^*$ durch $z \longrightarrow z\bar{z}$ gegeben ist. Der Kern von N ist der eindimensionale Torus $\mathcal{S}_1$, dessen Gruppe reellwertiger Punkte durch $\mathcal{S}_1(\mathbb{R}) = S^1$ gegeben ist. Dies ist der maximale anisotrope Teiltorus von $\mathcal{S}/\mathbb{R}$. Ein anisotroper Torus T_1 über $\mathbb{R}$ ist immer isomorph zu $\mathcal{S}_1^r$. (Das kann ich an dieser Stelle eigentlich als Übungsaufgabe stellen.). Insbesondere ist also $T_1(\mathbb{R}) = (S^1)^r$.

4.2.2*Reduktive Gruppen über* $\mathbb{R}$: Eine lineare algebraische Gruppe G/k heißt reduktiv, wenn die 1- Komponente Z/k ihres Zentrums ein Torus ist, und wenn es eine halbeinfache Untergruppe $G^{(1)}/k$ gibt, so daß die Produktabbildung $Z \times_k G^{(1)} \longrightarrow G$ eine Isogenie ist. Falls k die Charakteristik Null hat, habe ich in 3.7.10.3 definiert, was eine halbeinfache Gruppe ist.

Beispiele:(1) Das Standardbeispiel ist die lineare Gruppe Gl_n/k, dann ist das Zentrum die Gruppe

$$Z = \begin{pmatrix} t & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & t & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & t & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & t \end{pmatrix},$$

dies Zentrum ist also isomorph zu G_m,und die Gruppe $G^{(1)}$ ist die Gruppe Sl_n/k. Die Isogenie

$$G_m \times_k G^{(1)} \longrightarrow Gl_n$$

hat als Kern die endliche Gruppe der n-ten Einheitswurzeln.

(2) Wir betrachten einen Vektorraum V/k und eine nicht entartete symmetrische bilineare Form F auf V. Eine hyperbolische Ebene in V ist ein zweidimensionaler Teilraum $H = kx \oplus ky$, so daß $F(x,x) = F(y,y) = 0$ und $F(x,y) = 1$. Dann können wir diese Ebene abspalten, wir können schreiben

$$V = H \oplus V',$$

wobei die Zerlegung orthogonal ist. Wir nehmen jetzt mal an, daß wir einige hyperbolische Ebenen abgespalten haben, d.h.

$$V = ke_1 \oplus kf_1 \oplus \cdots ke_r \oplus kf_r \oplus V'.$$

Dann können wir in der orthogonalen Gruppe $SO(F)/k$, die für $\dim V > 2$ eine halbeinfache Gruppe ist, die Untergruppe M/k betrachten, die alle Geraden ke_i, kf_j

fest läßt. Dies ist dann eine reduktive Gruppe, bezüglich einer geeigneten Basis besteht sie aus den Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & & & \\ 0 & t_1^{-1} & 0 & \cdots & & \\ \vdots & 0 & \ddots & & & \\ & & \cdots & t_r & 0 & \\ & & & \cdots & t_r^{-1} & 0 \\ \cdots & & & & 0 & ' \end{pmatrix},$$

wobei A' dann aus der orthogonalen Gruppe $O(F]V')$ ist. Wenn $\dim V > 2$, dann ist das Zentrum genau die Untergruppe derjenigen Matrizen mit $A' = 1$, es ist also dann ein r-dimensionaler Torus.

Bemerkung : Man sollte sich vielleicht merken, daß geeignete Summenzerlegungen reduktive Untergruppen als Stabilisatoren, geeignete Fahnen parabolische Untergruppen liefern.

Wir wollen jetzt reduktive Untergruppen über $\mathbb{R}$ betrachten. Gemäß der Isogenie $Z \cdot G^{(1)} = G$ haben wir eine Zerlegung der Lieschen Algebra in

$$\mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}.$$

Wenn wir nun in $G_\infty^{(1)}$ eine Einskomponente $K^{(1)}$ einer maximal kompakten Untergruppe wählen und diese mit der Einskomponente der maximal kompakten Untergruppe von Z_∞ multiplizieren, dann erhalten wir wieder eine kompakte Untergruppe K in G_∞, die dei gleiche Rolle spielen kann wie die gleichnamige Gruppe für halbeinfache Gruppen. Wir können wieder $(\mathfrak{g}, K)$-Moduln und Harish-Chandra-Moduln definieren. Für uns ist die folgende Beobachtung wichtig:

Ist $\mathcal{V}$ ein irreduzibler Harish-Chandra-Modul für $(\mathfrak{g}, K)$, dann ist auch irreduzibel unter $\mathfrak{g}^{(1)}$ und $\mathfrak{z}$ operiert durch eine lineare Abbildung $zv = \omega(z)v$ darauf.

Dies folgt wie üblich aus dem Lemma von Schur. Wir können uns also eim Studium von $(\mathfrak{g}, K)$-Moduln auf den Fall halbeinfacher Gruppen beschränken.

Es sei nun $G/\mathbb{R}$ eine halbeinfache lineare algebraische Gruppe mit der Lieschen Algebra $\mathfrak{g}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1)*Die Gruppe der reellen Punkte G_∞ ist kompakt.*

(2) *Die Killingform auf $\mathfrak{g}$ ist negativ definit.*

(3) *Die Gruppe $G/\mathbb{R}$ enthält keinen nicht trivialen zerfallenden Torus über $\mathbb{R}$*

(4) *Die Gruppe $G/\mathbb{R}$ enthält keine nicht triviale parabolische Untergruppe über $\mathbb{R}$.*

Das beste Beispiel, an Hand dessen man sich von der Richtigkeit dieser Aussage überzeugt, ist die orthogonale Gruppe einer quadratischen Form(Siehe Beispiel (2) oben).

Es sie nun $G/\mathbb{R}$ eine halbeinfache Gruppe über $\mathbb{R}$, es sei K die Einskomponente einer maximal kompakten Untergruppe in G_∞, es sei Θ die zugehörige Cartansche Involution. (Siehe 3.7.14.1). Wir wählen auch noch eine minimale parabolische Untergruppe $P/\mathbb{R}$ von G_∞, es sei $\mathcal{P}$ ihre Liesche Algebra. Dann ist $M/\mathbb{R} = P \cap P^\Theta$

eine Leviuntergruppe von $P/\mathbb{R}$, wir setzen $K^M = M \cap K$, es sei $S/\mathbb{R}$ der maximale zerfallende Torus im Zentrum von $M/\mathbb{R}$. Schließlich sei $U/\mathbb{R}$ das unipotente Radikal von P. Es sei noch $A = S^0_\infty$, d.h. die Einskomponente von S_∞. Man hat dann

$$G_\infty = P_\infty K \ \ und \ \ P_\infty = U_\infty A K^M$$

Beispiele:(1) Wenn $G/\mathbb{R} = Sl_n(\mathbb{R})$, dann können wir für Θ die Abbildung $g \longrightarrow {}^t g^{-1}$ wählen dann ist $K = SO(n)$ und für die minimale parabolische Untergruppe wählen wir die Standardboreluntergruppe $B/\mathbb{R}$ der oberen Dreiecksmatrizen. Dann ist $B \cap B^\Theta = T$ der Diagonaltorus. Es ist

$$A = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots \\ 0 & t_2 & \cdots \\ & & \ddots \end{pmatrix} \ \ mit\ 0 < t_i < \infty,$$

und K^T besteht aus Diagonalmatrizen mit ± 1 als Einträgen. Die Gruppe K operiert transitiv auf den über $\mathbb{R}$ definierten Boreluntergruppen, das zeigt uns, daß $Gu = B_\infty K$ und die zweite Aussage oben ist auch klar.

(2) Wenn $G/\mathbb{R}$ die spezielle orthogonale Gruppe einer nicht entarteten quadratischen Form F ist, dann spalten wir wie oben hyperbolische Ebenen ab und zwar so viele wie möglic, wir schreiben also

$$\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}f_1 \cdots \oplus \mathbb{R}e_r \oplus kf_r \oplus V'.$$

Dann ist die Form auf V' definit, also ist $SO(F]V')$ kompakt. Wenn wir nun die Fahne

$$\mathcal{F} = \mathbb{R}e_1 \subset \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \subset \cdots \mathbb{R}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}e_r$$

einführen, dann ist der Stabilisator dieser Fahne eine minimale parabolische Untergruppe P. Wir führen jetzt noch eine neue Basis in den hyperbolischen Ebenen ein, indem wir setzen

$$v_i = (e_i + f_i)/\sqrt{2}, w_i = (e_i - f_i)/\sqrt{2}.$$

Dann bekommmt unsere quadratische Form bezüglich dieser Basis die Gestalt $F(x_1, y_1, \cdots, x_r, y_r, v') = x_1^2 - y_1^2 + \cdots + x_1^2 - y_r^2 + F(v')$. Es sei nun $F]V'$ positiv definit. Dann erhalten wir eine maximal kompakte Untergruppe K von $SO(F)$, wenn wir mit der orthogonalen Gruppe der Form $F'(x_1, y_1, \cdots, x_r, y_r, v') = x_1^2 + y_1^2 + \cdots + x_r^2 + y_r^2 + F(v')$ schneiden (Siehe 2.3.3 im Fall $r = 1$). Wählt man nun noch eine Basis von V', so daß die ganze Form F einfach die Summe der Quadrate der Koordinaten wird, dann wird die Cartansche Involution Θ wieder durch $g \longrightarrow {}^t g^{-1}$ gegeben. Die parobolische Untergruppe P^Θ ist dann der Stabilisator er aus den $f_1, f_2, \cdots$ konstruierten Fahne.

Die Liesche Algebra von S nennen wir jetzt $\mathfrak{a}$, und $\mathfrak{u}$ sei wie immer die Liesche Algebra von U. Dann können wir die Liesche Algebra $\mathcal{P}$ zerlegen:

$$\mathcal{P} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{u} = \mathfrak{k}^M \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{u}.$$

Der Torus S operiert durch die adjungierte Darstellung auf $\mathfrak{u}$, weil S ein zerfallender Torus ist, können wir $\mathfrak{u}$ unter dieser Operation in Eigenräume zerlegen, es gibt eine Teilmenge $\Delta_P \subset X(T)$, so daß

$$\mathfrak{u} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta_P} \mathfrak{u}_\alpha,$$

wobei S auf dem Raum $\mathfrak{u}_\alpha$ durch den Charakter α operiert. Man nennt die Elemente aus Δ_P die positiven Wurzeln bzgl. P. Es gilt

Es gibt eine Menge $\pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r\} \subset \Delta_P$ so daß jedes Element $\alpha \in \Delta_P$ eine eindeutige Darstellung $\alpha = m_1\alpha_1 + \cdots + m_r\alpha_r$ mit natürlichen Zahlen m_i besitzt.

Diese Menge π heißt die Menge der *einfachen Wurzeln.*

Beispiele: (1) Im Fall $G = Sl_n(\mathbb{R})$ sind die Wurzeln die Charaktere $t \longrightarrow t_i/t_j$ mit $i < j$, wobei t ein Element aus T in der obigen Darstllung ist. Die einfachen Wurzeln sind dann die Charaktere $\alpha_i = t_i/t_{i+1}$.

(2) Die Situation ist im Fall der orthogonalen Gruppe $SO(F)/\mathbb{R}$ etwas komplizierter. Wir betrachten wieder die oben definierte Fahne $\mathcal{F}$. Dann sind die Wurzeln in Δ_P gerade die Charaktere

$$t \longrightarrow t_i/t_j \; mit \; i < j$$

und

$$t \longrightarrow t_i t_j \; mit \; i \neq j$$

und im Fall $V' \neq 0$ kommen noch die

$$t \longrightarrow t_i$$

hinzu. Dann kann man sich ziemlich leicht davon überzeugen, daß man als Systeme einfacher Wurzeln hat

$$t_1/t_2, t_2/t_3, \cdots, t_{r-1}/t_r \;\; und \; \begin{cases} t_{r-1}t_r & falls\; V' = 0 \\ t_r & falls\; V' \neq 0 \end{cases}.$$

Diese Aussage ist weniger offensichtlich, als die entsprechende Aussage im Fall Sl_n, es ist aber eine empfehlenswerte Übung, dies nachzurechnen.

Man definiert nun die Menge

$$A_- = \{a \in A]0 < \alpha_i(a) \leq 1 \;\text{ für }\; i = 1, 2 \cdots, r\}$$

und darin betrachte wir wieder die offene Teilmenge $K \times A_-^{\leq 1} \times K$ durch die Zusatzbedingung $\alpha_i(a) < 1$ für alle i definiert ist. Dann hat man wieder eine Cartansche Zerlegung:

$$J : K \times A_- \times K \longrightarrow G_\infty$$

ist surjektiv und die Ableitung von J ist auf der offenen Teilmenge $K \times A_-^{\leq 1} \times K$ surjektiv. (Diese Tatsache liegt nun schon ein wenig tiefer, es wird wieder empfohlen die Beispiele zu studieren.)

4.2.3 *Die Harish-Chandra-Moduln*: Ich will jetzt ganz kurz die Ideen und Resultate von Casselman und Milicic in ihrer Arbeit C-M beschreiben. Unsere Daten $G/\mathbb{R}, K, P, \Theta, M, S, A$ seien dieselben wie oben. Es seinun $\mathcal{V}$ ein irreduzibler Harish-Chandra-Modul für $(\mathfrak{g}, K)$. Wir fixieren K-Typen θ_1, θ_2 in $\mathcal{V}, \mathcal{V}^\flat$. Wir wählen Basen $v_1, v_2, \cdots, v_n$ und $\phi_1, \phi_2 \cdots, \phi_m$ von $\mathcal{V}_{\theta_1}, \mathcal{V}^\flat\theta_2$, und betrachten den Vektorraum der Matrixkoeffizienten

$$< gv_i, \phi_j >= c_{i,j}(g)$$

Nun operiert das Zentrum $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C})$ der universellen Einhüllenden Algebra $\mathfrak{U}(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C})$ auf $\mathcal{V}$ durch den zentralen Charakter χ_V. Dann folgt, daß man ein System von Differentialgleichungen für die Matrixkoeffiezienten $c_{i,j}(g)$ bekommt, es gilt $zc_{i,j}(g) = \chi_V(z)c_{i,j}(g)$ für alle $z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C})$. Dann zieht man die Matrixkoeffiziente mit Hilfe der Abbildung J zu Funktionen auf $K \times A_- \times K$ zurück, und schränkt sie dann auf den offenen Teilraum $K \times A_-^{\leq 1} \times K$ ein. Auf dieser offenen Teilmenge schreibt man dann die Differentialoperatoren in den beiden K-Variablen und in den Variablen in A. Nun ist es natürlich wieder so, daß das Differenzieren in den K-Variablen, nur eine lineare Transformation in den $c_{i,j}$ bewirkt, die durch die vorliegenden K-Typen bestimmt ist, etwas genauer gesagt: Wenn X_1 ein invariantes Vektorfeld auf einem der beiden Faktoren K ist, sagen wir mal auf dem ersten, dann ist $X_1(c_{i,j}) = \sum_\nu a_{\nu,i,j}c_{\nu,j}$. Damit ist dann klar, daß wir diese Matrixkoeffizienten als Funktionen in den A-Variablen betrachten können, und daß uns der zentrale Charakter ein System von Differentialgleichungen für das System der Matrixkoeffizienten auf $K \times A_-^{\leq 1} \times K$ liefert. Dann zeigen Casselman und Milicic, daß man A in den $\mathbb{C}^r$ einbetten kann, so daß sich dieses System als ein System von Differentialgleichungen mit regulären Singularitäten im Sinne von Deligne D interpretieren läßt. Die Singularitäten liegen längs gewisser Hyperflächen, wozu auch die Hyperflächen $\alpha_i(a) = 0$ gehören. Das hat zur Folge, daß man wieder eine asymptotische Entwicklung dieser Matrixkoeffizienten bekommt, insbesondere kennt man das asymptotische Verhalten der Matrixkoeffizienten in den Variablen in $A_-^{\leq 1}$, wenn eine oder mehrere der $\alpha_i(a)$ gegen Null gehen. Das hat dann wieder die folgende Anwendung

Satz 4.2.3.1:*Ist $\mathcal{V} \neq 0$ ein irreduzibler Harish-Chandra- Modul für $(\mathfrak{g}, K)$, dann ist $\mathcal{V}/\mathfrak{u}\mathcal{V}$ ein von Null verschiedener, endlich erzeugter $(\mathfrak{m}, K^M)$-Modul*

Der Beweis läuft im Prinzip ganz genauso wie im Fall Sl_2. Es sei E ein Element aus $\mathfrak{u}$, wir schreiben dies Element als Summe von Elementen aus den $\mathfrak{u}_\alpha$:

$$E = \sum E_\alpha.$$

Dann studieren wir die Funktion $< aEv_i, \phi_j >$ in der Variablen $a \in A_-^{\leq 1}$. Wenn wir das a an dem E vorbeiziehen dann erhalten wir

$$aE = (\sum \alpha(a)E_\alpha)a.$$

und daher

$$< aEv_i, \phi_j >= -\sum \alpha(a) < av_i, E_\alpha\phi_j > .$$

Dann sind wir fertig, die Faktoren $\alpha_i(a)$ gehen schnell gegen Null, wenn für ein geeignetes i_0 der Wert α_{i_0} gegen Null strebt, also geht dieser Matrixkoeffizient schneller gegen Null, als ein aus reinen K-Typen gebildeter Matrixkoeffizient.

Nun ist aber $\mathfrak{m} = \mathfrak{k}^M \oplus \mathfrak{a}$ und ein $(\mathfrak{m}, K^M)$-Modul ist ein Vektorraum auf dem K^M und $\mathfrak{a}$ vertauschend operieren. Wenn ein solcher Modul dann auch noch endlich erzeugt ist, dann besitzt er immer einen Quotienten von der Form $\mathcal{W}_{\sigma,\lambda}$, wobei $\mathcal{W}$ ein endlich dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$ ist, auf dem K^M durch eine irreduzible Darstellung σ und $\mathfrak{a}$ durch eine lineare Abbildung λ operiert

Der linearen Abbildung λ entspricht nun wieder ein Quasicharakter $\lambda : A \longrightarrow \mathbb{C}$, so daß $\lambda(\exp(\tau X)) = 1 + \lambda(X)\tau + \cdots$. Diese beiden Daten fassen wir wir wieder zu Einem zusammen, wir definieren eine Darstellung

$$\chi : M_\infty = K^M A \longrightarrow Gl(\mathcal{W})$$

durch $\chi(m) = \chi(ka) = \sigma(k)\lambda(a)$. Eine solche Darstellung interpretieren wir wie im Abschnitt 4.1. auch als Darstellung von P_∞. Wir definieren jetzt noch den Quasicharakter $\delta : A \longrightarrow \mathbb{C}^*$: Die adjungierte Darstellung Ad von S auf $\mathfrak{u}$ definiert auch eine Darstellung auf der höchsten äußeren Potenz $\Lambda^{\dim(U)}\mathfrak{u}$ und operiert darauf durch einen Charakter Σ, dieser Charakter ist die Summe der positiven Wurzeln mit Multiplizitäten gezählt. Er induziert einen Homomorphismus $|\Sigma| : A \longrightarrow \mathbb{R}^*_{>0}$, aus dem können wir die positive Wurzel ziehen und das ergibt den gesuchten Quasicharakter δ. Es ist also im Nachhinein $|\Sigma| = 2\delta$.

Wir können jetzt wieder den induzierten Modul

$$\mathcal{H}_\chi = \{f : G_\infty \longrightarrow \mathcal{W}]f(pg) = p^\delta\chi()f(g) \text{ } und \text{ } f]K \text{ } ist \text{ } in \text{ } L^2(K)\}$$

definieren und darin haben wir wieder den Untermodul der K-endlichen Vektoren $\mathcal{I}_\chi$, das sind diejenigen f mit $f]K$ ist K-endlich. Dann ist $\mathcal{H}_\chi$ ein Modul für G_∞ und $\mathcal{I}_\chi$ ist ein $(\mathfrak{g}, K)$-Modul. Man nennt diese Darstellungen wieder die von χ induzierten Darstellungen. Jetzt können wir die Überlegungen aus 4.1 wörtlich übernehmen und sehen, daß die Aussage des Submodultheorems von Casselman-Harish-Chandra allgemein gültig ist:

Jeder irreduzible Harish-Chandra-Modul für $(\mathfrak{g}, K)$ *ist isomorph zu einem Untermodul eines geeigneten Moduls* $\mathcal{I}_\chi$

Harish-Chandra selbst hat nur gezeigt, daß ein irreduzibler Harish-Chandra-Modul isomorph zu einem Subquotienten von $\mathcal{I}_\chi$ ist.

Zum Schluß wollen wir erwähnen, daß sich die Überlegungen im Beweis von Satz 4.1.5.1 auch wörtlich übertragen lassen. Mit Hilfe der Iwasawa-Zerlegung bekommen wir ein Haarsches Maß der Form

$$dg = a^{-2\delta} du \times d^*a \times dk$$

auf G_∞, insbesondere gilt also auch in der allgemeinen Situation die entsprechende Version des Satzes 4.1.5.1

4.3. *Die Gruppe* $G/\mathbb{R} = R_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(Sl_2/\mathbb{C})$: In diesem Fall ist die maximal kompakte Untergruppe die Gruppe $K = SU(2)$ sie korrespondiert zu der Cartaninvolution $\Theta : g \longrightarrow {}^t\overline{g}^{-1}$.(Siehe 2.3.3 und 3.7.14.1). Als minimale parabolische Untergruppe wählen wir die Boreluntergruppe B der oberen Dreiecksmatrizen, dann ist $T = B \cap B^\Theta$ der maximale Torus der Diagonalmatrizen. Die Abbildung

$$z \longrightarrow \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix}$$

liefert eine Identifizierung von $\mathcal{S}/\mathbb{R}$ mit $T/\mathbb{R}$. Dann gilt

$$K^T = \left\{ \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix} \right\} \text{ und } A = \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir studieren wieder die Gruppe der Quasicharaktere

$$\chi : B_\infty \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

$$\chi : \begin{pmatrix} z & u \\ 0 & z^{-1} \end{pmatrix} \longrightarrow \chi(z).$$

Ein solcher Quasicharakter kann in der Form

$$\chi(z) = |z\overline{z}|^s z^a \overline{z}^b$$

dargestellt werden, wobei dann (s, a, b) und $(s - m, a + m, b + m)$ mit $m \in \mathbb{Z}$ den gleichen Quasicharakter liefern.

Der Quasicharakter δ, den wir am Ende des vorangehenden Abschnitts ganz allgemein definiert haben, ist jetzt durch $\delta = (1, 0, 0)$ gegeben. Die induzierten Moduln sehen dann so aus

$$\mathcal{H}_\chi = \{f : G_\infty \longrightarrow \mathbb{C}]f(bg) = b^{\chi+\delta} \text{ und } f]K \text{ ist } L^2(K)\}$$

und entsprechend ist $\mathcal{I}_\chi$ definiert, hier fordern wir, daß $f]K$ von endlichem K-Typ ist.

Wir wissen, daß jeder irreduzible Harish-Chandra-Modul zu einem Untermodul von einem geeigneten $\mathcal{I}_\chi$ isomorph ist.

Als erstes berechnen wir den zentralen Charakter von $\mathcal{I}_\chi$. Ich erinnere an die Beschreibung von $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C})$, die ich in 3.7.10 gegeben habe, es ist

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}) = \mathbb{C}[C^{(+)}, C^{(-)}]$$

mit

$$C^{(\pm)} = \frac{1}{4}(H^{(\pm)})^2 - H^{(\pm)} + E_-^{(\pm)} E_+^{(\pm)},$$

wobei ich eine kleine Umnormierung vorgenommen habe und die Terme mit den E's noch bereinigt habe. Wir können jetzt die gleiche Rechnung wie in 4.1.4 vornehmen, der Term mit den E's ergibt Null, wir müssen nur die Wirkung der Terme mit den H's berechnen. Wir haben (Siehe 3.7.10)

$$H^{(\pm)} = H \pm (-i) \otimes H' \text{ mit } H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, H' = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Schaut man sich das ein wenig genauer an, dann sieht man, daß H der infinitesimale Erzeuger von A und H' der infinitesimale Erzeuger von K^T ist. Dann ergibt sich ganz leicht, daß für $f \in \mathcal{I}_\chi$ gilt

$$H_r(f) = (2(s+1) + a + b)f \text{ und } H'_r(f) = i(a - b)f.$$

Eine kleine Rechnung zeigt, daß

$$C^{(+)}f = ((s+a)^2 - 1)f \textit{ und } C^{(-)}f = ((s+b)^2 - 1)f.$$

4.3.1:*Die Kohomologie der* $(\mathfrak{g}, K)$*-Moduln*: Wir haben schon in 3.6.1 die rationalen Darstellungen der Gruppe $G \times \mathbb{C} = Sl_2 \times Sl_2$ angegeben, die Moduln sind von der Form $\mathcal{M}_{n,m} = \mathcal{M}_n \otimes \overline{\mathcal{M}}_m$. Diese Darstellungen sind selbstdual und es ist nicht schwierig, ihren zentralen Charakter zu bestimmen: Für $P \in \mathcal{M}_{n,m}$ gilt

$$C^{(+)}P = ((n+1)^2 - 1)P, C^{(-)}P = ((m+1)^2 - 1)P.$$

Wenn also $\mathcal{V}$ ein irreduzibler $(\mathfrak{g}, K)$-Modul ist, für den

$$H^{\cdot}(\mathfrak{g}, K, \mathcal{V} \otimes \mathcal{M}_{n,m}) \neq 0$$

und wenn $\mathcal{V} \subset \mathcal{I}_\chi$, dann ist χ einer von den vier Charakteren

$$\chi \in \{(0, -n-1, -m-1), (0, n+1, -m-1), (0, -n-1, m+1), (0, n+1, m+1)\}.$$

4.3.3. Wir wollen jetzt ein wenig anders vorgehen als in 4.1. und zunächst die Kohomologie

$$H^{\cdot}(\mathfrak{g}, K, \mathcal{I}_\chi \otimes \mathcal{M}_{n,m})$$

direkt studieren.(In 4.1 haben wir znächst die Kompositionsreihe der $\mathcal{I}_\chi$ untersucht.) Unser Ausgangspunkt ist dabei die allgemeine Beobachtung, daß $\mathcal{I}_\chi$ als induzierter Modul Kohomologiegruppen hat, die sich aus der Kohomologie des Moduls ausdrücken lassen, von dem aus induziert wurde.(Lemma von Shapiro). Die folgende Rechnung präzisiert dies, sie geht auf P.Delorme zurück.

An dieser Stelle sollten wir uns in den allgemeineren Rahmen am Ende des vorangehenden Absatzes zurückbegeben. Wir übernehmen die Daten von dort, wobei jetzt noch $\mathcal{M}$ ein irreduzibler rationaler Modul für $G \times \mathbb{C}$ ist. Wir wollen die Kohomologie

$$H^{\cdot}(\mathfrak{g}, K, \mathcal{I}_\chi \otimes \mathcal{M})$$

studieren. Sie wird durch den Komplex

$$\mathrm{Hom}_K(\Lambda^{\cdot}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \mathcal{I}_\chi \otimes \mathcal{M})$$

berechnet. Wir haben in 4.2 gesehen, daß

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{u},$$

daraus folgt, daß

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{k} = \mathfrak{m}/\mathfrak{k}^M \oplus \mathfrak{u}.$$

Ein Element

$$\omega \in \mathrm{Hom}_K(\Lambda^{\cdot}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \mathcal{I}_\chi \otimes \mathcal{M})$$

ist uns also bekannt, wenn wir seinen Wert auf $p+q$-Tupeln $(X_1, X_2, \cdots, X_p, Y_1, \cdots, Y_q) = (\overline{X}, \overline{Y})$ kennen, wobei die X_i aus $\mathfrak{m}$ sind, die Y_i aus $\mathfrak{u}$ sind und wobei $p+q$ natürlich der Grad von ω ist. Dann ist $\omega(\overline{X},\overline{Y})$ ein Element aus $\mathcal{I}_\chi \otimes \mathcal{M}$, dies können wir an der Stelle $1 \in G_\infty$ auswerten, dann ist

$$\omega(\overline{X},\overline{Y})(1) = \Phi(\omega) \in \mathcal{W}_{\chi+\delta} \otimes \mathcal{M}.$$

Dabei ist $\mathcal{W}_{\chi+\delta}$ der Modul auf dem P_∞ durch die Darstellung $\chi \otimes \delta$ operiert (Siehe 4.2.3).

Es ist leicht zu sehen, daß die Abbildung einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}\ _K(\Lambda^{\cdot}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \mathcal{I}_\chi \otimes \mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(\Lambda^{\cdot}(\mathfrak{m}/\mathfrak{k}^M \oplus \mathfrak{u}), \mathcal{W}_{\chi+\delta} \otimes \mathcal{M})$$

liefert. Wenn wir die Argumente in $\Phi(\omega)$ etwas anders arrangieren, indem wir schreiben

$$\phi(\omega)(\overline{X})(\overline{Y}),$$

dann sehen wir, daß $\Phi(\omega)(\overline{X})$ auch als ein Element in

$$\Phi(\omega)(\overline{X}) \in \mathrm{Hom}\ _{K^M}(\Lambda^{\cdot}(\mathfrak{m}/\mathfrak{k}^M), \mathcal{W}_{\chi+\delta} \otimes \mathrm{Hom}\ (\Lambda^{\cdot}\mathfrak{u}, \mathcal{M})$$

auffassen können. Mit anderen Worten wir haben einen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}\ _K(\Lambda^{\cdot}(\mathfrak{g}/\mathfrak{k}), \mathcal{I}_\chi \otimes \mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{Hom}\ _{K^M}(\Lambda^{\cdot}(\mathfrak{m}/\mathfrak{k}^M), \mathcal{W}_{\chi+\delta} \otimes \mathrm{Hom}\ (\Lambda^{\cdot}\mathfrak{u}, \mathcal{M}).$$

Wenn wir uns die rechte Seite nun ansehen, dann sehen wir, daß wir wieder im bekannten Rahmen sind: Der Modul $\mathcal{W}_{\chi+\delta}$ ist ein $(\mathfrak{m}, K^M)$ Harish-Chandra-Modul und $\mathrm{Hom}\ (\Lambda^{\cdot}\mathfrak{u}, \mathcal{M})$ ist zwar kein rationaler M-Modul, aber es ist ein Komplex von rationalen M-Moduln, das ist für die Zwecke der homologischen Algebra genauso gut. Wir haben jetzt auf

$$\mathrm{Hom}\ _{K^M}(\Lambda^{\cdot}(\mathfrak{m}/\mathfrak{k}^M), \mathcal{W}_{\chi+\delta} \otimes \mathrm{Hom}\ (\Lambda^{\cdot}\mathfrak{u}, \mathcal{M})$$

zwei Randoperatoren: Einmal den Operator d_U auf dem Komplex $\mathrm{Hom}\ (\Lambda^{\cdot}\mathfrak{u}, \mathcal{M})$ und den Operator d_M aus

$$\mathrm{Hom}_{K^M}(\Lambda^{\cdot}(\mathfrak{m}/\mathfrak{k}^M, \mathcal{W}_{\chi+\delta} \otimes \cdots).$$

Damit wird dies also zu einem Doppelkomplex, aus dem man in bekannter Weise einen einfachen Komplex macht. Nun gilt

Lemma 4.3.3.1 *Die Abbildung Φ liefert einen Isomorphismus von Komplexen.*

Beweis: Dies ergibt sich aus einer gaz direkten Rechnung, man schreibt einfach die Formel für $d(\Phi(\omega))$ hin, wobei man beachtet, daß d bis auf ein Vorzeichen die Summe von d_M und d_U ist. Vergleicht man dies mit $\Phi(d\omega)$, so findet man eine Übereinstimmung der Terme. Das Einzige, was beim Vergleich der beiden Formeln zu beachten ist, daß die Klammerterme $\omega(\cdots, [X_i, Y_j], \cdots)$, die auf der linken Seite auftauchen, auch auf der rechten Seite auftauchen, sie kommen daher, dß man bei der Operation von $\mathfrak{m}$ auf $\mathrm{Hom}\ (\Lambda^{\cdot}\mathfrak{u}, \mathcal{M})$ die adjungierte Darstellung von $\mathfrak{m}$ auf $\mathfrak{u}$ berücksichtigen muß. Es lohnt sich nicht die Rechnung im Detail vorzuführen.

Nun ist es ja ein allgemeines Prinzip der homologischen Algebra, daß man die Kohomologie eines Komplexes, der aus einem Doppelkomplex herrührt, mit Hilfe einer Spektralsequenz berechnen kann. (Siehe auch I, 2.2.8). Hier ist die Situation aber noch günstiger. Wir haben einen Komplex von rationalen M oder auch $M\times\mathbb{C}$-Moduln, es ist klar, daß der Randoperator mit der Operation von M verträglich ist. Nun gibt es ein sehr schönes Theorem von Kostant (Siehe Ko ,***), das ich hier nicht formulieren will, aber es impliziert, daß für einen irreduziblen $G \times \mathbb{C}$-Modul $\mathcal{M}$ die Kohomologie $H^{\cdot}(\mathfrak{u},\mathcal{M})$ in $\mathrm{Hom}\,(\Lambda^{\cdot}\mathfrak{u},\mathcal{M})$ isotypisch ist. Genauer gesagt gilt:

4.3.3.2: *Man hat eine direkte Summenzerlegung von Komplexen von $M \times \mathbb{C}$-Moduln*

$$\mathit{Hom}\;(\Lambda^{\cdot}\mathfrak{u},\mathcal{M}) = \mathbf{H}^{\cdot}(\mathfrak{u},\mathcal{M}) \oplus AZ^{\cdot},$$

wobei $\mathbf{H}^{\cdot}(\mathfrak{u},\mathcal{M})$ ein Komplex ist, in dem alle Randoperatoren Null sind, und wobei $AZ^{\cdot}$ ein azyklischer Komplex ist. Die beiden Summanden haben keinen gemeinsamen Isomorphietyp, wenn man sie in irreduzible $M \times \mathbb{C}$-Moduln zerlegt.

Wir werden dies nachher sehr schön sehen können, wenn wir auf unser konkretes Beispiel zurückkommen. Ohne die letzte Aussage folgt die obige Behauptung auch aus der Tatsache, daß die rationalen Darstellungen reduktiver Gruppen vollständig reduzibel sind.

Dies hat nun als Konsequenz, daß

$$H^{\cdot}(\mathfrak{u},\mathcal{M}) = \mathbf{H}^{\cdot}(\mathfrak{u},\mathcal{M})$$

und es folgt sofort, daß die Spektralsequenz degeneriert, es ist

$$H^{\cdot}(\mathfrak{g},K,,\mathcal{I}_\chi\otimes\mathcal{M}) = H^{\cdot}(\mathfrak{m},K^M,\mathcal{W}_{\chi+\delta}\otimes H^{\cdot}(\mathfrak{u},\mathcal{M}))$$

dies ist die Formel von Delorme für die Kohomologie eines Moduls der Form $\mathcal{I}_\chi\otimes\mathcal{M}$.

4.3.4: Wir wollen dies nun auf unser konkretes Beispiel anwenden. Wir beginnen mit der Untersuchung von $H^{\cdot}(\mathfrak{u},\mathcal{M}_{n,m})$. Wir müssen dies als $T\times\mathbb{C}$ Modul verstehen. Nun ist $T\times\mathbb{C}$ das Produkt der beiden Diagonaltori in $G\times\mathbb{C} = Sl_2\times Sl_2$. Wenn wir uns noch daran erinnern, daß $\mathcal{M}_{n,m} = \mathcal{M}_n\otimes\overline{\mathcal{M}}_m$ ist, dann ist klar, daß

$$\mathrm{Hom}(\Lambda^{\cdot}\mathfrak{u},\mathcal{M}_{n,m}) = \mathrm{Hom}(\Lambda^{\cdot}\mathfrak{u}^{(+)},\mathcal{M}_n)\otimes\mathrm{Hom}(\Lambda^{\cdot}\mathfrak{u}^{(-)},\mathcal{M}_m).$$

Wir brauchen also nur die Situation auf den einzelnen Faktoren, d.h. für die Gruppe Sl_2 zu verstehen. Dort ist $\mathfrak{u}\otimes\mathbb{C} = \mathbb{C}E_+$. Dann sieht der Komplex so aus

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_n \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathfrak{u},\mathcal{M}_n) \longrightarrow 0$$

$$m \longrightarrow \{E_+ \longrightarrow E_+m\}.$$

Der Modul $\mathcal{M}_n$ zerfällt unter Operation von dem diagonalen Torus in Gewichtsräume (Siehe III,3.6.2. Beispiel 1), wir haben

$$\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1}\end{pmatrix} X^{n-\nu}Y^{\nu} = t^{n-2\nu}X^{n-\nu}Y^{\nu},$$

es tauchen also die Gewichte $n, n-2, \ldots, -n$ in $\mathcal{M}_n$ auf. Auf $\mathfrak{u}$ operiert der Torus mit dem Gewicht 2, in $\mathrm{Hom}(\mathfrak{u},\mathcal{M}_n)$ tauchen also die Gewichte $n-2, n-$

$4, \ldots, -n, -n-2$ auf. Man sieht sofort (Siehe auch III,3.6.2), daß der Randoperator auf den gemeinsam auftretenden Gewichtsräumen ein Isomorphismus ist, diese liefern den Unterkomplex $AZ^{\cdot}$. Es ist

$$\mathbf{H}^0(\mathfrak{u}, \mathcal{M}_n) = \mathbb{C}X^n \textit{ und } \mathbf{H}^1(\mathfrak{u}, \mathcal{M}_n) = \mathbb{C}\{E_+ \longrightarrow Y^n\}.$$

Insbesondere sind also die Gewichte des Torus auf der Kohomologie gleich $n, -n-2$.

Wenn wir auf die Gruppe $Sl_2 \times Sl_2$ und den darin liegenden Diagonaltorus zurückkommen, dann sehen wir, daß der Torus $T \times \mathbb{C}$ auf $H^{(}\mathfrak{u}, \mathcal{M}_{n,m})$ mit den folgenden Gewichten operiert:

$$\begin{gathered}(n, m) \;\; auf \;\; H^0(\mathfrak{u}, \mathcal{M}_{n,m}) \\ (-n-2, m) \;\; und \;\; (n, -m-2) \;\; auf \;\; H^1(\mathfrak{u}, \mathcal{M}_{n,m}) \\ (-n-2, -m-2) \;\; auf \;\; H^2(\mathfrak{u}, \mathcal{M}_{n,m})\end{gathered}$$

Wenn wir also die Kohomologie $H^{\cdot}(\mathfrak{g}, K, \mathcal{I}_\chi \otimes \mathcal{M}_{n,m})$ mit Hilfe der Formel von Delorme ausrechnen wollen, dann können wir so vorgehen. Sei η einer der vier oben aufgelisteten Charaktere von $T \times \mathbb{C}$, sei $\mathcal{N}_\eta$ der zugehörige rationale $T \times \mathbb{C}$-Modul, wir setzen noch $d(\eta)$ gleich dem Grad der Kohomologiegruppe auf der der Torus durch η operiert. Wir haben

$$H^{\cdot}(\mathfrak{g}, K, \mathcal{I}_\chi \otimes \mathcal{M}_{n,m}) = \bigoplus_\eta H^{\cdot - d(\eta)}(\mathfrak{t}, K^T, \mathbb{C}_{\chi+\delta} \otimes \mathcal{N}_\eta).$$

Um diese Kohomologie zu berechnen, schaut man sich die Komplexe an, also

$$\mathrm{Hom}_{K^T}(\Lambda^{\cdot}\mathfrak{a}, \mathbb{C}_{\chi+\delta} \otimes \mathcal{N}_\eta),$$

und man sieht sofort, daß diese Kohomologie verschwindet, wenn $\eta]T_\infty \neq (-\chi - \delta)$, dann induziert der Randoperator einen Isomorphismus zwischen den Graden 0 und 1. Ist dagegen

$$\eta]T_\infty = -\chi - \delta, \tag{coh}$$

dann ist der Randoperator Null und wir bekommen

$$H^{\cdot}(\mathfrak{t}, K^T, \mathbb{C}_{\chi+\delta} \otimes \mathcal{N}_\eta) = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C},$$

wobei die Kohomologie in den Graden 0 und 1 sitzt.

Wenn wir dies nun auswerten, dann müssen wir berücksichtigen, daß $\mathcal{N}_\eta$ Kohomologie im Grad $d(\eta)$ repräsentiert. Wir haben genau dann Kohomologie, wenn

$$\chi = \begin{cases} (0, -n-1, -m-1) & \eta = (n, m) \quad d(\eta) = 0 \\ (0, -n-1, m+1) & \eta = (-n-2, m) \quad d(\eta) = 1 \\ (0, n+1, -m-1) & \eta = (n, -m-2) \quad d(\eta) = 1 \\ (0, -n-1, -m-1) & \eta = (-n-2, -m-2) \quad d(\eta) = 2 \end{cases}.$$

Wenn wir nun nur die nichttrivialen Kohomologiegruppen hinschreiben,dann bekommen wir

$$H^q(\mathfrak{g}, K, \mathcal{I}_\chi \otimes \mathcal{M}_{n,m}) = \begin{cases} \mathbb{C} \quad q = 0,1 & \chi = (0, -n-1, -m-1) \\ \mathbb{C} \quad q = 1,2 & \chi = (0, -n-1, m+1) \textit{ oder } = (0, n+1, -m-1) \\ \mathbb{C} \quad q = 2,3 & \chi = (0, n+1, m+1) \end{cases}.$$

4.3.5:*Die Kompositionsreihen und die Unitarisierbarkeit*: Wir setzen jetzt mal $\chi = (0, n+1, m+1)$ und $\psi = (0, n+1, -m-1)$, dann erhalten wir genauso wie in 4.1 (ich habe dies auch am Ende von 4.2 angedeutet) nicht entartete Paarungen

$$\mathcal{I}_\chi \times \mathcal{I}_{-\chi} \longrightarrow \mathbb{C}, \mathcal{I}_\psi \times \mathcal{I}_{-\psi} \longrightarrow \mathbb{C},$$

und mit einer Rechnung, die ganz analog zu der in 4.1.6 ist bekommen wir Verkettungsoperatoren

$$T_\chi : \mathcal{I}_\chi \longrightarrow \mathcal{I}_{-\chi}, T_\psi : \mathcal{I}_\psi \longrightarrow \mathcal{I}_{-\psi}$$

Jetzt ist aber leicht zu sehen, daß der Modul $\mathcal{I}_{-\chi}$ den Modul $\mathcal{M}_{n,m}$ also Untermodul enthält.(Dieselbe Konstruktion wie in 4.1.5.4), wir bekommen also exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_{n,m} \longrightarrow \mathcal{I}_{-\chi} \longrightarrow \tilde{\mathcal{I}}_{-\chi} \longrightarrow 0$$

und dazu dual

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{I}}_\chi \longrightarrow \mathcal{I}_\chi \longrightarrow \mathcal{M}_{n,m} \longrightarrow 0$$

Ich behaupte zunächst

Die beiden Sequenzen spalten nicht.

Das ergibt sich aus einer einfachen Betrachtung der Kohomologie Wir tensorieren die Sequenzen mit $\mathcal{M}_{n,m}$, dann erhalten wir wieder eine exakte Sequenz von $(\mathfrak{g}, K)$-Moduln. Nach der Clebsch-Gordan-Formel taucht der triviale Modul $\mathbb{C}$ genau einmal in $\mathcal{M}_{n,m} \otimes \mathcal{M}_{n,m}$ auf. Also schließen wir genauso wie in 4.1.7 daß

$$H^\cdot(\mathfrak{g}, K, \mathcal{M}_{n,m} \otimes \mathcal{M}_{n,m}) = H^\cdot(\mathfrak{g}, K, \mathbb{C}) = H^\cdot(S^3, \mathbb{C}),$$

wenn wir das in die exakte Kohomologiesequenz einsetzen, sehen wir daß sie nicht spalten kann, wir bekämen einen Widerspruch zu unseren Formeln für die Kohomologie von $\mathcal{I}_\chi \otimes \mathcal{M}_{n,m}$.

Es gilt ferner

Die Moduln $\tilde{\mathcal{I}}_\chi$ und $\tilde{\mathcal{I}}_{-\chi}$ sind irreduzibel und zueinander isomorph. Ferner sind diese Moduln auch isomorph zu den Moduln $\mathcal{I}_\psi$ und $\mathcal{I}_{-\psi}$.

Ich möchte diese Aussagen hier nicht beweisen, sondern nur ein wenig kommentieren.

Zunächst ist es relativ einfach die K-Typen zu verstehen, die in den Moduln $\mathcal{I}_\chi$ und $\mathcal{I}_\psi$ enthalten sind. Die Gruppe $K = SU(2)$ ist eine halbeinfache algebraische Gruppe über $\mathbb{R}$, es ist $SU(2) \times \mathbb{C} = Sl_2/\mathbb{C}$. Daraus folgt, daß die irreduziblen Darstellungen von $SU(2)$ in $\mathbb{C}$-Vektorräumen die gleichen sind wie die von $Sl_2/\mathbb{C}$, sie werden also durch die natürlichen Zahlen parametrisiert. Die Gruppe K^T ist die Gruppe der reellen Punkte eines maximalen Torus, wenn wir die Konstantenerweiterung mit $\mathbb{C}$ vornehmen, dann entsteht ein maximaler Torus in Sl_2. Jetzt sei $\lambda = (s, a, b)$ ein beliebiger Quasicharakter. Wegen der Iwasawa-Zerlegung haben wir wieder eine Identifizierung von $\mathcal{H}_\lambda$ mit einem Teilraum von $L^2(K)$, und zwar

$$\mathcal{H}_\lambda = \left\{ f \in L^2(K)] f\left(\begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix} k \right) \right\} = e^{i(a-b)\phi} f(k).$$

Daraus ergibt sich leicht au allgemeinen Prinzipien der Darstellungstheorie, daß $\mathcal{H}_\lambda$ oder $\mathcal{I}_\lambda$ eine irreduzible Darstellung θ genau so oft enthält wie die Einschränkung von θ auf K^T den Charakter $e^{i(a-b)\phi}$ enthält (das ist eigentlich nochmal Frobenius Reziprozität). Es sei nun θ_n diejenige irreduzible Darstellung von $K = SU(2)$, die nach Erweiterung mit $\mathbb{C}$ die Darstellung auf dem Raum der homogenen Polynome vom Grad n wird. Wir kennen die Zerlegung dieser Darstellungen in Gewichtsräume unter dem Torus (Siehe III, 3.6.3) es tauchen gerade die Gewichte $n, n-2, \cdots, -n$ auf ind zwar mit Multiplizität 1. Dann folgt also daß $\mathcal{I}_\lambda$ die folgende Zerlegung in K-Typen hat:

$$\mathcal{I}_\lambda = \bigoplus_{n \equiv a-b \mod 2, n \geq |a-b|} \theta_n.$$

Wenn dies klar ist, dann folgt ohne große Schwierigkeiten, daß die Moduln $\mathcal{I}_\psi, \mathcal{I}_{-\psi}, \tilde{\mathcal{I}}_\chi, \tilde{\mathcal{I}}_{-\chi}$ alle die gleichen K-Typen haben. Zunächst ist leicht zu sehen, daß alle diese Moduln irreduzibel sind(dazu gebe ich weiter unten in 4.3.6 noch ein Argument).

Es bleiben die Aussagen über die Unitarisierbakeit und die Aussage über die Isomorphie der vier Moduln. Diese letzte Aussage ist ohne Zweifel ganz interessant. Es ist klar, daß die Moduln die gleichen K-Typen und den gleichen zentralen Charakter haben. Aber daraus folgt noch nicht die Isomorphie. Es sollte eigentlich möglich sein sie zu beweisen, indem man die Moduln der Form $\mathcal{I}_\chi / \mathfrak{u}\mathcal{I}_\chi$ sorfältig studier. Aber das ist nicht ganz einfach, schon im Fall Sl_2 konnten wir die Struktur dieser Quotienten nicht direkt aufklären, sondern müßten die Kompositionsreihen genau kennen. Ich lasse das mal als Übungsaufgabe offen.

Wir wollen dann zum Schluß noch kurz die Unitarisierbarkeit dieser speziellen Moduln besprechen. Die komplexe Konjugation auf $\mathbf{Z}(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C})$ vertauscht die beiden Operatoren $C^{(\pm)}$, dann folgt aus der Formel in 3.7.11.2 (3) daß notwendig für die Unitarisierbarkeit die Bedingung $n = m$ ist (Siehe auch 3.7.14.9). Wenn diese Bedingung gilt, dann ist $\chi(z) = (z/\overline{z})^{\pm(n+1)}$. Dies ist ein unitärer Charakter, wir sind in der gleichen Situation wie in 4.1.5.3 und die Unitarisierbarkeit folgt. 4.3.6 : Wir wollen noch ein paar Bemerkungen zu den Fragen der Irreduzibilität und der Unitarisierbarkeit der Darstellungen machen. Wir überlegen uns zuerst, daß ein Modul $\mathcal{I}_\eta$, der nicht irreduzibel ist, einen endlich dimensionalen Quotienten oder einen endlich dimensionalen Untermodul enthalten muß. Das folgt aus einer Betrachtung der K-Typen . Die K-Typen sind durch die natürlichen Zahlen mit einer Paritätsbedingung parametrisiert. Ist $v \in \mathcal{I}_\eta$ vom K-Typ n und ist $X \in \mathfrak{g}$, dann kommen in Xv höchstens die K-Typen $n-2, n, n+2$ vor. Das liegt daran, daß die adjungierte Darstellung von K auf $\mathfrak{g}$ gerade θ_2 ist. Wenn wir also einen echten Untermodul $\mathcal{V}$ in $\mathcal{I}_\eta$ haben, dann gibt es eine Zahl n, so daß θ_n in $\mathcal{V}$ vorkommt aber einer der K-Typen $n+2$ oder $n-2$ nicht. Dann ist aber klar, daß je nach dem welcher Fall vorliegt, die K-Typen , die größer oder die kleiner als n sind einen echten Untermodul erzeugen. Daraus ergibt sich die oben formulierte Behauptung. Jetzt schauen wir uns den zentralen Charakter an. Wenn $\mathcal{I}_\eta$ den Modul $\mathcal{M}_{n,m}$ als Subquotienten enthält, und wenn $\eta = (s, a, b)$, dann muß gelten $n+1 = \pm(s+a), m+1 = \pm(s+b)$. Also ist η einer der 4.3.5 aufgelisteten Charaktere $\chi, -\chi, \psi, -\psi$ es ist dann klar, daß für $\eta = (0, n+1, m+1)$ oder dessen Inverses der Modul $\mathcal{I}_\eta$ reduzibel werden kann.

4.3.7.Nun kommen wir zur Frage der Unitarisierbarkeit. Ist uns ein unitärer Modul $\mathcal{I}_\chi$ mit $\chi = (s, a, b)$ gegeben, dann impliziert die Unitarität, daß $(s+a)^2 = (\overline{s}+b)^2$, d.h.

$$s + \overline{s} = -a - b \;\; oder \;\; s - \overline{s} = -a + b.$$

Wir sehen dann sehr leicht, daß wir im ersten Fall den Quasicharakter auch so schreiben können:

$$\chi : z \longrightarrow |z\overline{z}|^{it}(z/\overline{z})^m \ \ mit \ \ t \in \mathbb{R} \ \ und \ \ m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$$

wir schreiben $\chi = \{it, m\}$. Dann ist dies ein unitärer Charakter, wir können die gleiche Konstruktion wie in 4.1.5.3 anwenden. Dies sind dann wieder die Darstellungen der unitären Hauptserie.

Im zweiten Fall ist der Charakter von der Form $\chi(z) = |z\overline{z}|^\sigma$ mit $\sigma \in \mathbb{R}$. Die Überlegungen aus 4.1.* lassen sich nun hier ganz genauso durchführen, wir erhalten unitarisierbare Darstellungen für $-1 < \sigma < 1, \sigma \quad und \quad -\sigma$ liefern die gleiche Darstellung. Dies sind die Darstellungen der Nebenserie, für $\sigma = 1$ wird der Modul reduzibel.