$\boxed{8.}$ Übungsaufgaben: Einführung in die Algebra, WS 18/19

****

Aufgabe A28. Sei H eine Untergruppe von S_5. Angenommen H enthält einen 5-Zykel und einen 2-Zykel. Zeigen Sie, dass $H = S_5$ gilt.

Aufgabe A29. Sei $f\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Zeigen Sie:

(i) Ist I ein Ideal von S, so ist $f^{-1}(I)$ ein Ideal von R.

(ii) Ist f surjektiv und I ein Ideal von R, so ist $f(I)$ ein Ideal von S.

(iii) Ist f surjektiv, so definiert $I \mapsto f^{-1}(I)$ eine Bijektion

$$\{\text{Ideale von } S\} \to \{\text{Ideale } J \text{ von } R \text{ mit } \operatorname{Ker}(f) \subseteq J\}.$$

(iv) Sei f surjektiv, und sei I ein Ideal von S. Dann induziert die Komposition

$$R \xrightarrow{f} S \xrightarrow{p_I} S/I$$

einen Ringisomorphimus

$$R/f^{-1}(I) \to S/I$$
$$a + f^{-1}(I) \mapsto f(a) + I.$$

Aufgabe A30. Sei $p\colon R \to R'$ ein surjektiver Ringhomomorphismus, und setze $I := \operatorname{Ker}(p)$. Angenommen es gibt für jeden Ringhomomorphismus $f\colon R \to S$ mit $I \subseteq \operatorname{Ker}(f)$ genau einen Ringhomomorphismus $f'\colon R' \to S$ mit $f' \circ p = f$.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & R' \arrow[dl, dashed, "f'"] \\ S & \end{tikzcd}$$

Zeigen Sie, dass es dann einen Ringisomorphismus $p'\colon R' \to R/I$ gibt mit $p' \circ p = p_I$.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p_I"'] & R' \arrow[dl, dashed, "p'"] \\ R/I & \end{tikzcd}$$

Aufgabe A31. Sei R ein Ring, und sei $\rho_R\colon \mathbb{Z} \to R$ der kanonische Ringhomomorphismus. Sei $n = \operatorname{char}(R)$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Ker}(\rho_R) = (n)$.

****