

**7. Übungsaufgaben: Einführung in die Algebra, WS 18/19**

\*\*\*\*\*

**Aufgabe A24.** Sei  $p$  eine Primzahl, und sei  $G$  ein Gruppe mit  $|G| = p^2$ . Zeigen Sie, dass  $G$  abelsch ist.

**Aufgabe A25.** Seien  $p$  und  $q$  Primzahlen mit  $p > q$  und  $q \nmid (p - 1)$ . Zeigen Sie, dass  $\mathbb{Z}_{pq}$  bis auf Isomorphie die einzige Gruppe der Ordnung  $pq$  ist.

**Aufgabe A26.** Sei  $G \neq 1$  eine auflösbare endliche Gruppe, und sei  $N$  ein Normalteiler von  $G$ . Zeigen Sie: Es existiert eine Normalreihe

$$1 = N_0 \triangleleft N_1 \triangleleft \cdots \triangleleft N_n = G,$$

so dass gilt:

- (i) Für  $1 \leq i \leq n$  ist  $|N_i/N_{i-1}|$  eine Primzahl;
- (ii)  $N \in \{N_0, \dots, N_n\}$ .

**Aufgabe A27.** Für eine Gruppe  $G$  bezeichnet  $[G, G]$  die Kommutatorgruppe von  $G$ . Zeigen Sie:

- (i)  $[S_n, S_n] = A_n$  für  $n \geq 2$ ;
- (ii)  $[A_4, A_4] = V_4$ ;
- (iii)  $[V_4, V_4] = 1$ .

Insbesondere ist  $S_4$  auflösbar.

\*\*\*\*\*