

4. Übungsaufgaben: Einführung in die Algebra, WS 18/19

Aufgabe A12. Konstruieren Sie einen Teilkörper L von \mathbb{C} mit $\bar{L} \neq L$.

Aufgabe A13. Sei G eine Gruppe, und sei $H \subseteq G$ eine nicht-leere Teilmenge. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

- (i) H ist eine Untergruppe von G ;
- (ii) Für alle $h_1, h_2 \in H$ gilt $h_1 h_2^{-1} \in H$.

Zeigen Sie, dass für alle $H \leq G$

$$H = \{h^{-1} \mid h \in H\}$$

gilt.

Aufgabe A14. Sei H eine Untergruppe einer Gruppe G . Zeigen Sie:

- (i) Für $g_1, g_2 \in G$ gilt $g_1 H \cap g_2 H \neq \emptyset \iff g_1 H = g_2 H \iff g_1^{-1} g_2 \in H$.
- (ii) Die Abbildung

$$\begin{aligned} H &\rightarrow gH \\ h &\mapsto gh \end{aligned}$$

ist bijektiv. Insbesondere haben alle Nebenklassen dieselbe Kardinalität $|H|$.

- (iii) G ist die disjunkte Vereinigung aller Nebenklassen.
- (iv) Für $a, g \in G$ gilt $g \in aH$ genau dann wenn $g^{-1} \in Ha^{-1}$.

Finden Sie eine endliche Gruppe G , eine Untergruppe $H \leq G$ und Elemente $a, a', b \in G$ mit

$$aH = a'H \quad \text{und} \quad abH \neq a'bH.$$

Aufgabe A15.

- (i) Bestimmen Sie alle Untergruppen und Normalteiler von S_3 .
- (ii) Bestimmen Sie alle Untergruppen und Normalteiler von D_4 , D_5 und D_6 .

Da am Donnerstag, den 01.11.18 ein Feiertag ist: Abgabe nach Absprache mit Ihrem Tutor bis zum 02.11.18.
