

3. Übungsaufgaben: Einführung in die Algebra, WS 18/19

Aufgabe A8. Finden Sie Schobingers Fehler: St. Gallen, 3. Februar 1610. An den Hofmathematiker von König Rudolf II: Hochgeehrter Mathematiker, Freund der Wissenschaften und der bildenden Künste, königlicher Würdenträger, Entdecker vieler Wahrheiten Gottes, ich getraue mich kaum, an einen Mann solchen Ruhmes und solcher Geisteskraft mein bescheidenes Wort zu richten. Doch die Resultate meiner Arbeiten sind so unfasslich, dass ich sie nicht mehr weiter nur für mich behalten kann. Ich glaube, mit Gottes Hilfe das alte Problem der Winkeldreiteilung gelöst zu haben, und bitte nun um Ihren werten Kommentar. Ich beschreibe im Folgenden das Verfahren, mit dem es mir gelungen ist, jeden beliebigen Winkel allein mit Zirkel und Lineal zu dritteln. Um den Scheitel des Winkels ziehe ich einen Kreisbogen beliebiger Größe. Dieser schneide die Schenkel des Winkels in den Punkten A und B . Im Punkt A errichte ich ein Lot zur Sehne AB und trage auf ihr die doppelte Länge des Radius des Kreisbogens ab und erhalte den Punkt C . Verbinde ich den Scheitel mit diesem Punkt C und über ihn hinaus, erhalte ich den Strahl, welcher den ursprünglichen Winkel drittelt. Ich habe diese Konstruktion an männiglich vielen Winkeln ausprobiert, speziell an den Winkeln 15° , 30° , 60° und 90° und beim Nachmessen die Drittelung des Winkels feststellen können. Ich wage es nicht, Sie zur Eile zu drängen, warte aber in höchster Ungeduld auf Ihre Antwort. Möge der allmächtige und barmherzige Gott Sie beschützen und leiten. Bartholomäus Schobinger

Aufgabe A9. Sei L/K eine Körpererweiterung, und sei Z ein Zwischenkörper von L/K . Zeigen Sie:

- (i) Angenommen Z/K ist algebraisch. Ist $a \in L$ algebraisch über Z , so ist a algebraisch über K .
- (ii) Es sind äquivalent:
 - L/K ist algebraisch;
 - Z/K und L/Z sind algebraisch.

Aufgabe A10. Sei L/K eine Körpererweiterung, und seien E und F Zwischenkörper von L/K . Dann ist $E.F := K(E \cup F) = E(F) = F(E)$ das *Kompositum* von E und F . Zeigen Sie:

- (i) Ist E/K endlich, so ist $E.F/F$ endlich;
- (ii) Ist E/K algebraisch, so ist $E.F/F$ algebraisch;
- (iii) E/K und F/K sind endlich genau dann wenn $E.F/K$ endlich ist;
- (iv) E/K und F/K sind algebraisch genau dann wenn $E.F/K$ algebraisch ist;

Aufgabe A11. Wir betrachten die Körpererweiterung \mathbb{C}/\mathbb{Q} .

- (i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ für alle $a, b \in \mathbb{Q}$.
- (ii) Gilt $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})$?
