

1. Übungsaufgaben: Einführung in die Algebra, WS 18/19

Aufgabe A1. Finden Sie mit Hilfe der Cardano-Formeln die komplexen Nullstellen der folgenden Polynome aus $\mathbb{Q}[X]$. Welche dieser Nullstellen sind reell?

- (i) $X^3 + 3X^2 + 9X + 9$;
- (ii) $X^3 + X^2 + X + 1$;
- (iii) $X^3 + 3X^2 - 2X + 1$;
- (iv) $X^4 + X - \frac{1}{4}$.

Aufgabe A2.

- (i) Sei

$$f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{Z}[X]$$

ein Polynom vom Grad n . Sei

$$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

eine rationale Nullstelle von f . Wir können annehmen, dass $\text{ggT}(p, q) = 1$. Zeigen Sie, dass $p \mid a_0$ und $q \mid a_n$.

- (ii) Zeigen Sie, dass

$$4X^8 - 12X^7 - 5X^6 + 6X^5 + 5X^4 - 9X^3 + 8X^2 - 15X + 4 \in \mathbb{Z}[X]$$

keine rationale Nullstelle hat.

- (iii) Bestimmen Sie alle rationalen Nullstellen von

$$3X^4 + 4X^3 - 12X^2 + 4X - 15 \in \mathbb{Z}[X].$$

- (iv) Seien p und q verschiedene Primzahlen. Hat

$$qX^3 - p \in \mathbb{Z}[X]$$

eine rationale Nullstelle?

Aufgabe A3. Lesen und verstehen Sie die Anhänge A-D im Skript.

Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte. Abgabe immer am Donnerstag in der Vorlesung. Sie dürfen in Zweiergruppen abgeben.