

13. Übungsaufgaben: Einführung in die Algebra, WS 18/19

Aufgabe A48. Sei K ein Körper mit $\text{char}(K) \neq 2$, und sei $f \in K[X]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$, welches genau n paarweise verschiedene Nullstellen $a_1, \dots, a_n \in \overline{K}$ hat. Setze

$$\Delta := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j).$$

Sei $L := K(a_1, \dots, a_n)$. Wir können dann $G := \text{Gal}(L/K)$ als Untergruppe der Permutationsgruppe S_M auffassen, wobei $M = \{a_1, \dots, a_n\}$. Zeigen Sie:

- (i) Unter der Galois-Korrespondenz entspricht $K(\Delta)$ der Untergruppe $G \cap A_n$.
- (ii) Sei f irreduzibel und $n = 3$, dann gilt $G \cong S_3$, falls $\Delta \notin K$ und $G \cong A_3$, falls $\Delta \in K$.

Aufgabe A49. Wieviele Zwischenkörper hat

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}?$$

Aufgabe A50. Zeigen Sie, dass Galois-Erweiterungen L/K vom Grad 45 höchstens 12 Zwischenkörper haben.

Aufgabe A51. Verifizieren Sie alle Behauptungen in Abschnitt 7.3 des Skripts.
