$\boxed{10.}$ Übungsaufgaben: Einführung in die Algebra, WS 18/19

****

Aufgabe A36. Let L/K eine Körpererweiterung, und sei $a \in L$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $K[a] = K(a)$

(ii) a ist algebraisch über K.

Aufgabe A37. Beantworten Sie die folgenden Fragen (mit Begründung):

(i) Ist $\mathbb{Z}[X]$ ein euklidischer Ring?

(ii) Ist $\mathbb{Z}[X]$ ein Hauptidealring?

(iii) Ist $\mathbb{Z}[X]$ faktoriell?

Aufgabe A38.

(i) Benutzen Sie die universelle Eigenschaft der Lokalisierung, um $\mathrm{Quot}(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Q}$ zu zeigen.

(ii) Sei $R \neq 0$ ein kommutativer Ring, und sei $P \subset R$ ein Primideal von R. Dann ist $S := R \setminus P$ multiplikativ abgeschlossen. Der Ring $R_P := S^{-1}R$ ist dann die *Lokalisierung* von P. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Quot}(R/P) \cong R_P/R_P i_S(P).$$

Aufgabe A39. Sei R ein kommutativer Ring, und sei $a \in R$. Zeigen Sie:

(i) Angenommen a ist eine Nullstelle von $f \in R[X]$. Dann gilt $(X - a) \mid f$.

(ii) Sei R ein Integritätsring. Dann ist $R[X]$ ein Integritätsring und es gilt $\mathrm{grad}(fg) = \mathrm{grad}(f) + \mathrm{grad}(g)$ für alle $f, g \in R[X] \setminus \{0\}$.

(iii) Sei R ein Integritätsring, und sei $f \in R[X]$ mit $n = \mathrm{grad}(f) \geq 0$. Dann hat f höchstens n Nullstellen.

****