$\boxed{9.}$ Übungsaufgaben LA I, WS 17/18

****

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe A26. Sei V ein 6-dimensionaler Vektorraum. Für welche d gibt es Unterräume U und W von V mit $\dim(U) = \dim(W) = 4$ und $\dim(U \cap W) = d$?

Aufgabe A27. Sei $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus, wobei $\dim(V) = \dim(W) < \infty$. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist ein Isomorphismus;

(ii) f ist ein Monomorphismus;

(iii) f ist ein Epimorphismus.

Aufgabe A28. Seien V und W Vektorräume mit $\dim(V), \dim(W) < \infty$. Sei U ein Unterraum von V mit $\dim(W) \geq \dim(V) - \dim(U)$. Zeigen Sie: Es gibt ein $f \in \operatorname{Hom}_K(V, W)$ mit $\operatorname{Kern}(f) = U$.

Spezialfall: Sei U ein Unterraum von K^n. Dann gibt es ein $A \in K^{n,n}$, so dass $U = \mathcal{L}(A, 0)$.

****

Hausaufgaben

Aufgabe H33. Seien $U_1, \ldots, U_n$ endlich-dimensionale Unterräume eines Vektorraums V. Zeigen Sie:

$$\dim(U_1 + \cdots + U_n) = \sum_{i=1}^{n} \dim(U_i) - \sum_{i=2}^{n} \dim((U_1 + \cdots + U_{i-1}) \cap U_i).$$

Aufgabe H34. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, und sei U ein Unterraum von V. Sei $m := \dim(V) - \dim(U)$. Zeigen Sie: Es gibt $f_1, \ldots, f_m$ im Dualraum V^*, so dass

$$U = \bigcap_{i=1}^{m} \operatorname{Kern}(f_i).$$

Aufgabe H35. Sei

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3,4}.$$

Bestimmen Sie Basen des Kerns und des Bildes der Matrixabbildung $A\colon \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$.

Aufgabe H36. Wir betrachten Unterräume U und W von $\mathbb{Q}^4$ definiert durch

$$U := \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \quad \text{und} \quad W := \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

Finden Sie Basen von U, W, $U+W$ und $U \cap W$.

****