## $\boxed{8.}$ Übungsaufgaben LA I, WS 17/18

**********************************************************************

# Anwesenheitsaufgaben

**Aufgabe A23.** Sei $f\colon V \to W$ eine Isomorphismus von Vektorräumen, und sei $B$ Teilmenge von $V$. Zeigen Sie: $B$ ist eine Basis von $V$ genau dann wenn $f(B)$ eine Basis von $W$ ist.

**Aufgabe A24.** Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in $\mathbb{Q}^3$.

(i) Zeigen Sie: $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ist ein EZS von $\mathbb{Q}^3$.

(ii) Finden Sie alle Teilmengen von $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, welche eine Basis von $\mathbb{Q}^3$ bilden.

**Aufgabe A25.** Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ ein linear unabhängiges Vektorsystem. Zeigen Sie:

(i) $(v_1, \ldots, v_n, v_1 + \cdots + v_n)$ ist linear abhängig.

(ii) Jede $n$-elementige Teilmenge von $\{v_1, \ldots, v_n, v_1 + \cdots + v_n\}$ ist linear unabhängig.

**********************************************************************

# Hausaufgaben

**Aufgabe H29.** Wir untersuchen 14 Typen von diskreten dynamischen Systemen. Sei $A \in M_2(\mathbb{R})$ eine der im Folgenden aufgelisteten Matrizen. Skizzieren Sie für ausgesuchte Vektoren $v \in \mathbb{R}^2$ wie die *Bahn*

$$\mathcal{O}_v := \{A^n(v) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

von $v$ aussieht. Sei

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Wir unterscheiden 5 Fälle:

$$\begin{aligned} \text{Nodale Expansion}: &\quad \lambda_1 > \lambda_2 > 1, \\ \text{Lineare Expansion}: &\quad \lambda_1 > 1 = \lambda_2, \\ \text{Hyperbolische Transformation}: &\quad \lambda_1 > 1 > \lambda_2 > 0, \\ \text{Lineare Kontraktion}: &\quad \lambda_1 = 1 > \lambda_2 > 0, \\ \text{Nodale Kontraktion}: &\quad 1 > \lambda_1 > \lambda_2 > 0. \end{aligned}$$

Sei

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Wir unterscheiden 3 Fälle:

$$\begin{aligned} \text{Expansive Homothetie}: &\quad \lambda > 1, & \text{Identität}: &\quad \lambda = 1, \\ \text{Kontraktive Homothetie}: &\quad 1 > \lambda > 0. \end{aligned}$$

Sei

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Wir unterscheiden 3 Fälle:

$$\text{Parabolische Expansion}: \quad \lambda > 1, \qquad \text{Scherung}: \quad \lambda = 1,$$
$$\text{Parabolische Kontraktion}: \quad 1 > \lambda > 0.$$

Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

mit $b \neq 0$. Wir unterscheiden 3 Fälle:

$$\begin{aligned} \text{Spiralische Expansion}: &\quad \sqrt{a^2+b^2} > 1, \\ \text{Elliptische Transformation}: &\quad \sqrt{a^2+b^2} = 1, \\ \text{Spiralische Kontraktion}: &\quad \sqrt{a^2+b^2} < 1. \end{aligned}$$

**Aufgabe H30.** (i) Zeigen Sie: Die Anzahl der Elemente eines endlichen Körpers ist immer eine Primzahlpotenz.

(ii) Konstruieren Sie ein lineares Gleichungssystem mit genau 27 Lösungen.

(iii) Zeigen Sie: Es gibt kein lineares Gleichungssystem mit genau 28 Lösungen.

**Aufgabe H31.** Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ ein $V$-Vektorsystem mit $v_k \neq 0$ für alle $1 \leq k \leq n$. Zeigen Sie: $(v_1, \ldots, v_n)$ ist linear unabhängig genau dann wenn für alle $1 \leq k \leq n-1$ gilt: $\mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_k) \cap \mathrm{Lin}(v_{k+1}, \ldots, v_n) = \{0\}$.

**Aufgabe H32.** Seien $U$ und $W$ Unterräume von $K^n$, und seien $B \subset U$ und $C \subset W$ Basen.

(i) Beschreiben Sie einen Algorithmus, welcher eine Basis von $U + W$ liefert.

(ii) Beschreiben Sie einen Algorithmus, welcher eine Basis von $U \cap W$ liefert.

*****************************************************************