$\boxed{7.}$ Übungsaufgaben LA I, WS 17/18

****

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe A20. Untersuchen Sie, ob das $\mathbb{Q}^3$-Vektorsystem (u, v, w) linear abhängig ist, wobei u, v, w wie folgt definiert sind. Falls ja, stellen Sie den Nullvektor als eine nicht-triviale Linearkombination der Vektoren u, v, w dar.

(i)

$$u = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(ii)

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe A21. Seien $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ Vektoren in K^n.

Zeigen Sie: Das Vektorsystem (v, w) ist linear unabhängig genau dann wenn $a_i b_j \neq a_j b_i$ für mindestens ein Paar (i, j).

Aufgabe A22. Sei V ein Vektorraum, und sei $M \subseteq V$. Zeigen Sie:

(i) $M \subseteq \mathrm{Lin}(M)$;

(ii) Sei $N \subseteq M$. Dann gilt $\mathrm{Lin}(N) \subseteq \mathrm{Lin}(M)$;

(iii) $\mathrm{Lin}(\mathrm{Lin}(M)) = \mathrm{Lin}(M)$.

****

Hausaufgaben

Aufgabe H25. Sei V ein Vektorraum, und sei $M \subseteq V$. Zeigen Sie:

(i) $\mathrm{Lin}(M)$ ist gleich dem Durchschnitt aller Unterräume U von V mit $M \subseteq U$;

(ii) $M = \mathrm{Lin}(M)$ genau dann wenn M ein Unterraum von V ist;

Seien U und W Unterräume von V. Zeigen Sie oder widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel:

(iii) $\mathrm{Lin}(U \cup W) = U + W$;

(iv) $\mathrm{Lin}(U \cap W) = U \cap W$.

Aufgabe H26. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das $\mathbb{R}^3$-Vektorsystem (u, v, w) linear unabhängig, wobei

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} a \\ -2 \\ 4a^2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H27. Sei B Teilmenge eines Vektorraums V. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) B ist eine Basis von V;
(ii) B ist ein **minimales EZS von** V (d.h. für alle $b \in B$ gilt $\mathrm{Lin}(B \setminus \{b\}) \neq \mathrm{Lin}(B) = V$);
(iii) B ist eine **maximale linear unabhängige Teilmenge von** V (d.h. für jedes $w \in V \setminus B$ ist $B \cup \{w\}$ linear abhängig).

Aufgabe H28. Konstruieren Sie einen Vektorraum V und eine unendliche Teilmenge $M \subseteq V$ mit den Eigenschaften: M ist linear abhängig, und (v, w) ist linear unabhängig für alle $v, w \in M$ mit $v \neq w$.

****