$\boxed{5.}$ Übungsaufgaben LA I, WS 17/18

****

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe A18. Sei $f\colon \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^3$ definiert durch

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 + a_2 - a_3 \\ a_3 - 2a_4 \\ 3a_1 - a_2 + a_3 \end{pmatrix}$$

für alle $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass f linear ist und bestimmen Sie die zugehörige Matrix $A_f \in \mathbb{Q}^{3,4}$ (hier benutzen wir die Notation aus der Vorlesung).

Aufgabe A19. Sei $B \in K^{m,n}$ in reduzierter Zeilenstufenform, und sei $r := |\mathcal{I}(B)|$. Dann gilt

$$\mathrm{Bild}(B) = \left\{ \sum_{j=1}^{r} a_j e_j \mid a_j \in K \right\}.$$

****

Hausaufgaben

Aufgabe H17. Sei $A \in M_n(K)$ invertierbar. Zeigen Sie: Es existieren Elementarmatrizen $T_1, \ldots, T_t$ vom Typ I (also $T_k \in \{T_{ij}^{(n)}(a) \mid 1 \le i, j \le n, i \ne j, a \in K\}$ für alle $1 \le k \le t$) mit

$$T_t \cdots T_1 A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & d \end{pmatrix}$$

für ein $d \in K^*$.

Aufgabe H18. Falls möglich, bestimmen Sie die Inversen der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{Q}), \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{F}_{11}).$$

Aufgabe H19. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$A_\lambda := \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

invertierbar?

Aufgabe H20. Sei $A \in K^{m,n}$, und sei A^T die Transponierte von A. Zeigen Sie:

(i) A ist ein Monomorphismus genau dann wenn A^T ein Epimorphismus ist.

(ii) A ist ein Epimorphismus genau dann wenn A^T ein Monomorphismus ist.

(iii) A ist ein Isomorphismus genau dann wenn A^T ein Isomorphismus ist

****

Abgabe der Lösungen der Hausaufgaben: Freitags in der Vorlesung.