$\boxed{4.}$ Übungsaufgaben LA I, WS 17/18

****

Wie immer bezeichnet K einen Körper.

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe A15. Konstruieren Sie Endomorphismen f und g mit:

(i) f ist ein Monomorphismus, aber kein Epimorphismus.

(ii) g ist ein Epimorphismus, aber kein Monomorphismus.

Aufgabe A16. Bestimmen Sie die Graphen aller linearen Abbildungen $f\colon K \to K$

Aufgabe A17. (Diese Aufgabe können Sie vermutlich erst am Dienstag bearbeiten.) Bestimmen Sie die reduzierte Zeilenstufenform der folgenden Matrizen (wobei wir über dem Körper $K = \mathbb{Q}$ arbeiten), und bestimmen Sie die Kerne der zugehörigen Matrixabbildungen.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & 7 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -4 & -6 & -8 & -10 & -10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

****

Hausaufgaben

Aufgabe H13. Sei f ein Endomorphismus eines Vektorraums V. Zeigen Sie:

(i) $\mathrm{Kern}(f^n) \subseteq \mathrm{Kern}(f^{n+1})$ für alle $n \geq 0$. (f^n ist die n-fache Hintereinanderschaltung von f, wobei wir $f^0 := \mathrm{id}_V$ setzen)

(ii) Falls $\mathrm{Kern}(f^n) = \mathrm{Kern}(f^{n+1})$ für ein $n \geq 0$, so gilt auch $\mathrm{Kern}(f^{n+1}) = \mathrm{Kern}(f^{n+2})$.

(iii) Formulieren und beweisen Sie die entsprechenden Aussagen für $\mathrm{Bild}(f^n)$.

Aufgabe H14. Für $n \geq 0$ sei $P_n \subseteq K^K$ die Menge aller polynomialen Abbildungen $K \to K$ vom Grad $\leq n$. (Eine Abbildung $f\colon K \to K$ ist **polynomial** vom Grad $\leq n$ falls es ein $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in K^{n+1}$ gibt mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

für alle $x \in K$.)

Zeigen Sie:

(i) P_n ist ein Unterraum von K^K.

(ii) Sei $K = \mathbb{R}$. Dann ist die Abbildung $F\colon K^{n+1} \to P_n$, welche definiert ist durch

$$a = (a_0, \ldots, a_n) \mapsto [F_a\colon x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k],$$

bijektiv.

(iii) Sei p eine Primzahl. Für welche Paare (p,n) ist (ii) falsch, wenn man mit $K = \mathbb{Z}_p$ statt mit $K = \mathbb{R}$ arbeitet?

(iii) (Vereinfachte Aufgabe) Zeigen Sie: Wenn man mit $K = \mathbb{Z}_2$ statt mit $K = \mathbb{R}$ arbeitet, dann ist (ii) falsch für alle $n \geq 2$.

Aufgabe H15. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$. Zeigen Sie: $\mathrm{Kern}(A) = 0$ genau dann wenn $ad - bc \neq 0$.

Aufgabe H16. (Diese Aufgabe können Sie vermutlich erst am Dienstag bearbeiten.) Seien $A, B \in M_4(\mathbb{Q})$ definiert wie folgt:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie AB und BA.

(ii) Bestimmen Sie die reduzierte Zeilenstufenform von A und B.

(iii) Bestimmen Sie $\mathrm{Kern}(A)$ und $\mathrm{Kern}(B)$.

(iv) Falls möglich, so bestimmen Sie A^{-1} und/oder B^{-1}.

****

Abgabe der Lösungen der Hausaufgaben: Freitags in der Vorlesung.