$\boxed{3.}$ Übungsaufgaben LA I, WS 17/18

****

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe A13. Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ein Endomorphismus mit $f^2 = f$. Zeigen Sie: $V = \mathrm{Bild}(f) \oplus \mathrm{Kern}(f)$.

Aufgabe A14. Bestimmen Sie alle möglichen Matrixprodukte XY wobei

$$X, Y \in \left\{ A := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},\ B := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix},\ C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir fassen A, B, C, D als Matrizen über $\mathbb{Q}$ auf.

****

Hausaufgaben

Aufgabe H9. Sei $f \colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie: Ist U ein Unterraum von W, so ist das Urbild $f^{-1}(U)$ ein Unterraum von V. Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage? (Genauer: Sei U eine Teilmenge von W, so dass $f^{-1}(U)$ ein Unterraum von V ist. Ist dann U ein Unterraum von W?)

Aufgabe H10. Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ ein Endomorphismus mit $f^2 = \mathrm{id}_V$. Zeigen Sie: Falls $\mathrm{char}(K) \neq 2$, so gilt $V = \mathrm{Kern}(f - \mathrm{id}_V) \oplus \mathrm{Kern}(f + \mathrm{id}_V)$.

Aufgabe H11. Für Matrizen $A, B \in M_n(K)$ sei $[A, B] := AB - BA$ der *Kommutator* von A und B. Sei $\lambda \in K$. Für $n \geq 2$ sei $J(n, \lambda)$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie alle Matrizen $A \in M_n(K)$ mit $[A, J(n, \lambda)] = 0$.

Aufgabe H12. Sei $A = (a_{ij})$ eine Matrix in $M_{m,n}(K)$. Die *Transponierte* A^T von A ist dann definiert durch $A^T := (b_{ji})$ wobei $b_{ji} := a_{ij}$ für alle $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$. Insbesondere gilt $A^T \in M_{n,m}(K)$. Zeigen Sie: Für $A \in M_{l,m}(K)$ und $B \in M_{m,n}$ gilt $(AB)^T = B^T A^T$.

****

Abgabe der Lösungen der Hausaufgaben: Freitags in der Vorlesung.