$\boxed{2.}$ Übungsaufgaben LA I, WS 17/18

****

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe A9. (*Ein Körper mit 9 Elementen*) Für jede Primzahl p haben wir in der Vorlesung einen Körper $\mathbb{Z}_p$ mit p Elementen konstruiert. Setze $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}_p$. Sei nun $K := \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$. Mit Hilfe der Addition und Multiplikation des Körpers $\mathbb{F}_3$ definieren wir Abbildungen $+\colon K \times K \to K$, $(x, y) \mapsto x + y$ und $\cdot\colon K \times K \to K$, $(x, y) \mapsto x \cdot y$ durch

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d) \quad \text{und} \quad (a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

Zeigen Sie:

(i) $(K, +, \cdot)$ ist ein Körper (welchen wir mit $\mathbb{F}_9$ bezeichnen).

(ii) Für $(a, b) \neq 0$, wie sieht $(a, b)^{-1}$ aus?

(iii) Finden Sie alle Elemente in $\mathbb{F}_9$, welche die Gleichung $X^2 = -1$ lösen.

Aufgabe A10. Konstruieren Sie einen Körper mit genau vier Elementen.

Aufgabe A11. (i) Sei V eine Menge und sei $+\colon V \times V \to V$, $(x, y) \mapsto x + y$ eine Abbildung, welche folgende Eigenschaften erfüllt:

(1) $a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle $a, b, c \in V$.

(2) Es gibt ein Element $e \in V$ mit $v + e = e + v = v$ für alle $v \in V$.

(3) $v + v = e$ für alle $v \in V$.

Sei nun $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit 2 Elementen. Definiere eine Abbildung $\cdot\colon \mathbb{F}_2 \times V \to V$, $(a, v) \mapsto av$ durch $0v := e$ und $1v := v$ für alle $v \in V$.

Zeigen Sie: $(V, +, \cdot)$ ist ein $\mathbb{F}_2$-Vektorraum.

(ii) Sei M eine Menge, und sei $V := \mathcal{P}(M)$ die Menge aller Teilmengen von M. Sei $e := \varnothing \in \mathcal{P}(M)$, und für $A, B \in V$ sei $A + B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Zeigen Sie: Die obigen Bedingungen (1), (2) und (3) sind erfüllt.

Aufgabe A12. Sei K ein Körper. Welche der folgenden Teilmengen des K-Vektorraums K^3 bilden einen Unterraum?

(i) $\{(a, b, c) \in K^3 \mid abc = 0\}$;

(ii) $\{(a, b, c) \in K^3 \mid a + b - c = 0\}$;

(iii) $\{(a, b, c) \in K^3 \mid c = 0\}$.

Sei nun $K = \mathbb{R}$.

(iv) $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \geq 0\}$;

(v) $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.

****

Hausaufgaben

Aufgabe H5. Sei $m \geq 2$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring ist. (Die Abbildungen $+$ und $\cdot$ sind definiert wie in der Vorlesung.)

Aufgabe H6. Sei V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie: Für alle $a \in K$ und $v, w \in V$ gilt:

(i) $0v = 0$;

(ii) $a0 = 0$;

(iii) $(-1)v = -v$;

(iv) $av = 0$ genau dann wenn $a = 0$ oder $v = 0$.

Geben Sie in jedem Schritt an, welches der Axiome $(A1), \ldots, (A4)$, $(SM1), \ldots, (SM4)$ Sie benutzen. Welche 0 ist jeweils gemeint? Die 0 aus K oder die 0 aus V?

Aufgabe H7. Zeigen Sie: Axiom (A2) in der Definition eines Vektorraums folgt bereits aus den anderen Axiomen.

Aufgabe H8. Seien U_1, U_2, W Unterräume eines Vektorraums V.

(i) Prüfen Sie, ob folgende Aussagen gelten:

$$(U_1 + U_2) \cap W = (U_1 \cap W) + (U_2 \cap W)$$
$$(U_1 \cap U_2) + W = (U_1 + W) \cap (U_2 + W)$$

(ii) Zeigen Sie: Falls $U_1 \subseteq U_2$, so gilt $U_2 \cap (W + U_1) = (U_2 \cap W) + U_1$.

(iii) Finden Sie einen Vektorraum V und Unterräume U_1 und U_2 von V mit $U_2 \cap (W + U_1) \neq (U_2 \cap W) + U_1$.

(iii) Verbesserte Aufgabenstellung: Finden Sie einen Vektorraum V und Unterräume U_1, U_2 und W von V mit $U_2 \cap (W + U_1) \neq (U_2 \cap W) + U_1$.

****

Abgabe der Lösungen der Hausaufgaben: Freitags in der Vorlesung.

****