$\boxed{1.}$ Übungsaufgaben LA I, WS 17/18

****

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe A1. Zeigen Sie: Für all $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Aufgabe A2. Sei $n \geq 1$. Wieviele bijektive Abbildungen

$$\{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$$

gibt es? (Mit Beweis) Finden Sie das minimale n mit der Eigenschaft: Es existieren bijektive Abbildungen

$$f, g \colon \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$$

mit $f \circ g \neq g \circ f$.

Aufgabe A3. Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, und welche sind surjektiv?. Für die bijektiven Abbildungen geben Sie jeweils die Umkehrabbildung an.

(i) $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto 4x - 3$;

(ii) $g \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{falls } x \geq 0, \\ -2x & \text{falls } x < 0; \end{cases}$

(iii) $h \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{falls } x \text{ gerade}, \\ \frac{1}{2}(x-1) & \text{falls } x \text{ ungerade}; \end{cases}$

(iv) $p \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{falls } x \geq 0, \\ -(2x+1) & \text{falls } x < 0; \end{cases}$

Aufgabe A4. Seien $f \colon X \to Y$ und $g \colon Y \to Z$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(i) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv. Muss auch g injektiv sein? (Beweis oder Gegenbeispiel);

(ii) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv. Muss auch f surjektiv sein? (Beweis oder Gegenbeispiel);

(iii) Sei $Z = X$ und es gelte $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Zeigen Sie: f ist bijektiv und es gilt $f^{-1} = g$.

Aufgabe A5. Sei $X \neq \varnothing$ eine endliche Menge und sei $f \colon X \to X$ eine Abbildung. Zeigen Sie: Es existiert ein $m \geq 1$ mit der Eigenschaft: Es gibt ein $x \in X$ mit $f^m(x) = x$. ($f^m = f \circ \cdots \circ f$ ist die m-fache Komposition (Hintereinanderschaltung) von f.)

Aufgabe A6. Konstruieren Sie einen Körper K mit genau drei Elementen.

Aufgabe A7. Sei K ein Körper, und seien $a, b \in K$. Zeigen Sie:

(i) Es gibt nur ein Einselement in K;

(ii) $(-a)b = -(ab)$;

(iii) Sei $ab = 0$. Dann gilt $a = 0$ oder $b = 0$, d.h. K ist **nullteilerfrei**.

(Geben Sie in jedem Schritt an, welches der Axiome $(A1), \dots, (A4)$, $(M1), \dots, (M4)$, (D) Sie benutzen.)

Aufgabe A8. Seien X und Y Mengen. Beweisen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) $X \subseteq Y$;

(ii) $X \cap Y = X$;

(iii) $X \cup Y = Y$;

(iv) $X \setminus Y = \varnothing$.

****

Aufgabe H1. Seien A, B, X, Y Mengen. Geben Sie für jede der folgenden Behauptungen einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an:

(i) $(A \times X) \cap (B \times Y) = (A \cap B) \times (X \cap Y)$;

(ii) $(A \times X) \cup (B \times Y) = (A \cup B) \times (X \cup Y)$;

(iii) $(A \times X) \cap (B \times X) = (A \cap B) \times X$;

(iv) $(A \times X) \cup (B \times X) = (A \cup B) \times X$.

Aufgabe H2. Seien $f\colon X_1 \to X_2$, $g\colon Y_1 \to Y_2$, $h_1\colon X_1 \to Y_1$ und $h_2\colon X_2 \to Y_2$ Abbildung mit $h_2 \circ f = g \circ h_1$, and seien h_1 und h_2 bijektiv. Zeigen Sie: f is injektiv genau dann wenn g injektiv ist.

Aufgabe H3. Sei K ein Körper. Zeigen Sie:

(i) Zu jedem $a \in K$ gibt es nur ein Element $b \in K$ mit $a + b = 0$;

Zeigen Sie: Für alle $a, b, c, d \in K$ gilt:

(ii) $a/b + c/d = (ad + bc)/(bd)$ falls $b \neq 0$ und $d \neq 0$;

(iii) $(-a)(-b) = ab$;

(iv) $-(-a) = a$.

(Geben Sie in jedem Schritt an, welches der Axiome $(A1), \dots, (A4)$, $(M1), \dots, (M4)$, (D) Sie benutzen.)

Aufgabe H4. Sei K ein Körper, und sei $K^* := K \setminus \{0\}$. Zeigen Sie: Es gibt keine bijektive Abbildung $e\colon K \to K^*$ mit $e(a + b) = e(a)e(b)$ für alle $a, b \in K$. (Hinweis: Der Fall $\mathrm{char}(K) = 2$ ist wichtig!)

****

Regeln:

- Abgabe der Lösungen der Hausaufgaben: Freitags in der Vorlesung.
- Zulässig sind Einzelabgaben und Abgaben in Zweiergruppen. Jedes Mitglied einer Zweiergruppe muss jede der bearbeiteten Aufgaben im Tutorium präsentieren können.
- Auf der ersten Seite sollen deutlich lesbar Ihre Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe stehen.
- Keine Abgabe von losen Zettelsammlungen!
- Für jede gelöste Hausaufgabe gibt es 4 Punkte.
- Wer mindestens 50% der Punkte erzielt und aktiv am Tutorium teilnimmt, wird zur Klausur zugelassen.