$\boxed{13.}$ Übungsaufgaben LA I, WS 17/18

****

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe A38. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis (bzgl. des Standardskalarprodukts s^3) des Unterraums

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid 2a - b + c = 0 \right\}$$

von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe A39. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Bestimmen alle Unterräume $U \subseteq \mathbb{R}^3$, so dass $s_A(v, u) = 0$ für alle $u \in U$ und alle $v \in \mathbb{R}^3$ gilt.

Aufgabe A40. Stellen Sie Fragen zum Skript.

****

Hausaufgaben

Aufgabe H49. Sei (V, s) euklidisch oder unitär. Zeigen Sie: Für $v, w \in V$ sind äquivalent:

(i) $|\langle v, w\rangle| = ||v|| \cdot ||w||$;

(ii) $\{v, w\}$ ist linear abhängig.

Aufgabe H50.

Sei (V, s) euklidisch oder unitär, und seien U und W Unterräume von V mit

$$V = U \perp W.$$

Gilt dann $U^\perp = W$ und $W^\perp = U$? (Beweis oder Gegenbeispiel.)

Aufgabe H51. Sei (V, s) ein n-dimensionaler euklidscher Vektorraum, und sei $f\colon V \to V$ ein Isomorphismus. Zeigen Sie: Folgt aus $\langle v, w\rangle = 0$ stets $\langle f(v), f(w)\rangle = 0$, so gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ so daß λf längentreu ist.

Aufgabe H52. Seien

$$b_1 := \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 7 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Vektoren in $\mathbb{R}^4$, und sei $U := \mathrm{Lin}(b_1, b_2, b_3)$.

(i) Benutzen Sie das Gram-Schmidtsche Verfahren, um eine Orthonormalbasis von (U, s_U) zu konstruieren, wobei s_U die Einschränkung des Standardskalarprodukts s auf $\mathbb{R}^4$ ist.

(ii) Konstruieren Sie eine Basis von $U^\perp$.

****