$\boxed{12.}$ Übungsaufgaben LA I, WS 17/18

****

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe A35. Untersuchen Sie, welche der folgenden reellen Matrizen positiv definit sind.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe A36. Für $A \in K^{n,n}$ sei

$$\begin{aligned} s_A \colon K^n \times K^n &\to K \\ (v, w) &\mapsto v^T A w. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(i) s_A ist eine Bilinearform.

(ii) s_A ist symmetrisch genau dann wenn $A^T = A$.

(iii) Formulieren und beweisen Sie entsprechende Aussagen für Sesquilinearformen.

Aufgabe A37. Sei

$$s \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

das Standardskalarprodukt. Beschreiben Sie alle $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2)$ mit

$$\langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$.

****

Hausaufgaben

Aufgabe H45. Für $C = (c_{ij}) \in K^{n,n}$ sei

$$\mathrm{Spur}(C) := \sum_{k=1}^{n} c_{kk}$$

die **Spur** von C. Sei $V := K^{n,n}$. Zeigen Sie: Die Abbildung

$$s \colon V \times V \to K, \quad (A, B) \mapsto \mathrm{Spur}(AB)$$

ist eine reguläre symmetrische Bilinearform. (s ist **regulär** falls $s(v, -) \neq 0$ und $s(-, w) \neq 0$ für alle $v, w \in V \setminus \{0\}$.)

Aufgabe H46. Sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

Zeigen Sie:

(i) $(\mathbb{R}^3, s_A)$ ist ein euklidischer Vektorraum.

(ii) Bestimmen Sie Winkel(e_i, e_j) für alle $1 \leq i, j \leq 3$, wobei e_1, e_2, e_3 die Standardbasisvektoren in $\mathbb{R}^3$ sind.

Aufgabe H47. Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller reellen Folgen, und sei V der Unterraum aller beschränkten reellen Folgen.

(i) Zeigen Sie:

$$\langle f, g \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)g(n)}{n^2}$$

definiert ein Skalarprodukt auf V.

(ii) Finden Sie einen Unterraum U von V mit $U \neq 0$, $U \neq V$ und $U^\perp = 0$. Hierbei ist

$$U^\perp := \{v \in V \mid \langle u, v \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}.$$

Aufgabe H48. Sei (V, s) ein euklidischer Vektorraum, und seien $u, v, w \in V$ mit $\langle u - w, v - w \rangle = 0$. Zeigen Sie:

$$\|u - w\|^2 + \|v - w\|^2 = \|u - v\|^2.$$

Zeichnen Sie ein passendes Bild zu dieser Aussage.

****