$\boxed{11.}$ Übungsaufgaben LA I, WS 17/18

****

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe A32. Sei $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, und seien $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $C = (c_1, \dots, c_m)$ geordnetet Basen von V bzw. W. Sei $A = \mathbf{c}_{B,C}(f)$. Seien $B^* = (b_1^*, \dots, b_n^*)$ und $C^* = (c_1^*, \dots, c_m^*)$ die entsprechenden geordneten dualen Basen der Dualräume V^* bzw. W^*, und sei

$$f^* \colon W^* \to V^*$$

definiert durch $g \mapsto g \circ f$. Bestimmen Sie die Koordinatenmatrix $\mathbf{c}_{C^*,B^*}(f^*)$.

Aufgabe A33. Klassifizieren Sie alle Matrizen in $M_2(\mathbb{F}_2)$ bis auf Äquivalenz und Ähnlichkeit.

Aufgabe A34. Zeigen Sie: Zu jeder Matrix $A \in K^{m,n}$ gibt es eine Matrix $B \in K^{n,m}$ mit

$$ABA = A \quad \text{und} \quad BAB = B.$$

****

Hausaufgaben

Aufgabe H41.

(i) Simultane Äquivalenz von Homomorphismen: Klassifizieren Sie alle $G(V)$-Bahnen in $\mathcal{H}_r(V)$ für

$$V = (K, K).$$

(ii) Simultane Ähnlichkeit von Endomorphismen: Klassifizieren Sie alle $G(V)$-Bahnen in $\mathcal{E}_r(V)$ für

$$V = K.$$

Aufgabe H42. Das n-Unterraum Problem:

(i) Für alle $n, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_1 + n_2$, klassifizieren Sie alle $G(V)$-Bahnen in $\mathcal{U}_2(V)$ für

$$V = (K^n, K^{n_1}, K^{n_2}).$$

(ii) Klassifizieren Sie alle $G(V)$-Bahnen in $\mathcal{U}_3(V)$ für

$$V = (K^2, K, K, K).$$

(iii) Klassifizieren Sie alle $G(V)$-Bahnen in $\mathcal{U}_4(V)$ für

$$V = (K^2, K, K, K, K).$$

Aufgabe H43.

Seien V und W K-Vektorräume, und seien V^* und W^* die entsprechenden Dualräume. Für $f \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ sei

$$f^* \colon W^* \to V^*$$

definiert durch $g \mapsto g \circ f$.

(i) Seien V und W endlich-dimensional. Zeigen Sie, dass $f \mapsto f^*$ einen Isomorphismus $\mathrm{Hom}_K(V, W) \to \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*)$ definiert.

(ii) Konstruieren Sie einen Monomorphismus $V \to (V^*)^*$.

Aufgabe H44. Für $\alpha \in [0, 2\pi[$ sei

$$D_\alpha := \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}.$$

(i) Beschreiben Sie die Abbildung $D_\alpha \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$;

(ii) Bestimmen Sie $D_\alpha \cdot D_\beta$;

(iii) Zeigen Sie, dass D_α invertierbar ist, und bestimmen Sie D_α^{-1}.

****