$\boxed{10.}$ Übungsaufgaben LA I, WS 17/18

****

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe A29. Seien $B = (b_1, \ldots, b_n)$ und $C = (c_1, \ldots, c_m)$ geordnete Basen von V bzw. W. Wir wissen, dass

$$D := (f_{(b_1,c_1)}, \ldots, f_{(b_n,c_1)}, f_{(b_1,c_2)}, \ldots f_{(b_n,c_2)}, \ldots, f_{(b_1,c_m)}, \ldots, f_{(b_n,c_m)})$$

eine geordnete Basis von $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist.

Für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$ sei $B_{ij} \in K^{m,n}$ die Matrix mit einer Eins an der Stelle (i, j) und Nullen sonst. Dann ist

$$E := (B_{11}, \ldots, B_{1n}, B_{21}, \ldots, B_{2n}, \ldots, B_{m1}, \ldots, B_{mn})$$

eine geordnete Basis von $K^{m,n}$.

Wir wissen, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_K(V,W) \arrow[r, "\mathbf{c}_{B,C}"] \arrow[d, "\mathbf{c}_D"] & K^{m,n} \arrow[d, "\mathbf{c}_E"] \\ K^{mn} \arrow[r, "\mathbf{c}_{D,E}(\mathbf{c}_{B,C})"] & K^{mn} \end{tikzcd}$$

kommutiert. Bestimmen Sie $\mathbf{c}_{D,E}(\mathbf{c}_{B,C})$.

Aufgabe A30. Seien

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \quad \text{und} \quad C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Dann ist B eine geordnete Basis von $\mathbb{Q}^2$, und C ist eine geordnete Basis von $\mathbb{Q}^3$. Sei $f\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3$ der Homomorphismus mit

$$\mathbf{c}_{B,C}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $f(v)$ wobei $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe A31. Formulieren Sie Fragen zu den Kapiteln 8, 9 und 10 des Skripts.

****

Hausaufgaben

Aufgabe H37. Sei $f\colon \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ der Endomorphismus, welcher definiert ist durch

$$f \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a - b \\ a + b \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie die Koordinatenmatrix $\mathbf{c}_{B,B}(f)$ von f bezüglich der geordneten Basis

$$B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{Q}^2$.

(ii) Bestimmen Sie die Koordiantenmatrix $\mathbf{c}_{C,C}(f)$ von f bezüglich der geordneten Basis

$$C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

von $\mathbb{Q}^2$.

(iii) Konstruieren Sie eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ (und auch S^{-1}) mit

$$S^{-1}\mathbf{c}_{B,B}(f)S = \mathbf{c}_{C,C}(f).$$

Aufgabe H38. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$, und sei

$$f\colon M_2(\mathbb{Q}) \to M_2(\mathbb{Q})$$

definiert durch $f(X) := AX - XA$.

(i) Zeigen Sie, dass f $\mathbb{Q}$-linear ist.

(ii) Konstruieren Sie Basen von $\mathrm{Kern}(f)$ und $\mathrm{Bild}(f)$.

(iii) Wählen Sie eine geordnete Basis B von $M_2(\mathbb{Q})$, und berechnen Sie die Koordinatenmatrix $\mathbf{c}_{B,B}(f)$.

Aufgabe H39. Sei B geordnete Basis eines n-dimensionalen K-Vektorraums V. Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$, so dass $\mathbf{c}_{B,B}(f) = \lambda E_n$ mit $\lambda \in K$. Zeigen Sie: $\mathbf{c}_{B',B'}(f) = \lambda E_n$ für alle geordneten Basen B' von V.

Aufgabe H40. (i) Sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, und sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) $f^2 = \mathrm{Id}_V$.

(b) Es gibt eine geordnete Basis B von V und $r, s \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathbf{c}_{B,B}(f) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_s \end{pmatrix}.$$

(ii) Zeigen Sie durch Angabe eines Beispiels, dass in (i) die Voraussetzung $\mathrm{char}(K) \neq 2$ benötigt wird.

****