$\boxed{9.}$ Übungsaufgaben LA II, SS 18

****

Hausaufgaben

Aufgabe H33. Zeigen Sie, dass die Abbildung γ aus dem Beweis von Satz 16.6 wohldefiniert ist.

Aufgabe H34. Für $i = 1, 2$ sei $f_i \colon V_i \to W_i$ eine K-lineare Abbildung zwischen endlich-dimensionalen Vektorräumen, und seien B_i und C_i geordnete Basen von V_i bzw. W_i.

(i) Definieren Sie eine zugehörige lineare Abbildung

$$f_1 \otimes f_2 \colon V_1 \otimes V_2 \to W_1 \otimes W_2.$$

(Universelle Eigenschaft!)

(ii) Angenommen wir kennen die Koordinatenmatrizen $\mathbf{c}_{B_i,C_i}(f_i)$. Wie sieht die Koordinatenmatrix

$$\mathbf{c}_{B_1 \otimes B_2, C_1 \otimes C_2}(f_1 \otimes f_2)$$

aus? (Stichwort: Kronecker-Produkt.)

Aufgabe H35. Sei K ein Körper mit Involution $\bar{\cdot}$, und sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Sei

$$s \colon V \times V \to K$$

eine Sesquilinearform. Zeigen Sie: Für jede geordnete Basis von V gilt:

(1) s ist hermitesch $\iff$ $\mathbf{c}_B(s)$ ist hermitesch;

(1°) s ist symmetrisch $\iff$ $\mathbf{c}_B(s)$ ist symmetrisch;

(2) s ist schiefhermitesch $\iff$ $\mathbf{c}_B(s)$ ist schiefhermitesch;

(2°) s ist schiefsymmetrisch $\iff$ $\mathbf{c}_B(s)$ ist schiefsymmetrisch.

Aufgabe H36. Sei $s \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(v, w) \mapsto 3v_1w_2 + 4v_1w_3 - 3v_2w_1 - v_2w_3 - 4v_3w_1 + v_3w_2.$$

(i) Finden Sie eine Involution $\bar{\cdot}$, sodass s eine Metrik ist.

(ii) Zu welchen Typen (1), (1°), (2), (2°) gehört s?

(iii) Berechnen Sie die Koordinatenmatrizen $\mathbf{c}_B(s)$ und $\mathbf{c}_C(s)$ und die zugehörige Basiswechselmatrix, wobei

$$B := (e_1, e_2, e_3) \qquad \text{und} \qquad C := (e_3, e_2, (1/4, 1, -3/4)^T).$$

****