$\boxed{8.}$ Übungsaufgaben LA II, SS 18

****

Hausaufgaben

Aufgabe H29. Finden Sie normierte Polynome $p_1, p_2 \in K[X]$ vom Grad mindestens 1, so dass $B(p_1, p_2)$ und $B(p_1p_2)$ nicht ähnlich sind.

Aufgabe H30. Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $\dim(V) = n$. Zeigen Sie: Es gibt eine Zerlegung

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t,$$

so dass V_i f-invariant und f_{V_i}-zyklisch ist für alle $1 \leq i \leq t$, wobei $f_{V_i}\colon V_i \to V_i$ die Einschränkungsabbildung ist.

Aufgabe H31. (i) Sei $K = \mathbb{F}_3$. Wieviele Konjugationsklassen gibt es in $K^{3,3}$ und $\mathrm{GL}_3(K)$? Wie sehen die zugehörigen Smith-, Frobenius-, und Weierstraß-Normalformen aus?

(ii) Verifizieren Sie die Berechnungen in den Abschnitten 15.11.3 und 15.11.4 des Skripts.

Aufgabe H32. Sei V ein K-Vektorraum, und sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Für $v \in V$ sei

$$v + U := \{v + u \mid u \in U\}$$

die **Restklasse von v modulo U**. Zeigen Sie:

(i) Für $v, w \in V$ sind äquivalent:

(a) $v + U = w + U$;
(b) $v - w \in U$;
(c) $(v + U) \cap (w + U) \neq \varnothing$.

(ii) Für $v, w \in V$ sei $v \sim w$, falls $v+U = w+U$. Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf V. Die Restklassen modulo U sind dann die zugehörigen Äquivalenzklassen.

Sei

$$V/U := \{v + U \mid v \in V\}$$

die Menge aller Restklassen modulo U. Für $v, w \in V$ und $\lambda \in K$ setze

$$(v + U) + (w + U) := (v + w) + U \qquad \text{und} \qquad \lambda(v + U) := (\lambda v + U).$$

(iii) Die Menge V/U zusammen mit der oben definierten Operationen ist ein K-Vektorraum. (Achtung: Wohldefiniertheit!)

(iv) Sei $f\colon V \to W$ ein Homomorphismus. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon V/\operatorname{Kern}(f) &\to \operatorname{Bild}(f) \\ v + \operatorname{Kern}(f) &\mapsto f(v) \end{aligned}$$

ein Isomorphismus.

(v) Sei $V = U \oplus U'$. Dann gilt $V/U \cong U'$.

****