# $\boxed{5.}$ Übungsaufgaben LA II, SS 18

*****************************************************************

## Hausaufgaben

**Aufgabe H17.** Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Folgen $(a_n)_{n\geq 0}$ reeller Zahlen, und sei

$$f\colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

die Abbildung, welche definiert ist durch $f((a_n)_{n\geq 0}) := (a_{n+1} - a_n)_{n\geq 0}$. (Das heißt eine Folge $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ wird von $f$ abgebildet auf die Folge $(a_1 - a_0, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \ldots)$.

(i) Zeigen Sie, dass $f$ eine lineare Abbildung ist.

(ii) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von $f$.

(iii) Bestimmen Sie Kern$(f)$.

(iv) Bestimmen Sie Bild$(f)$.

**Aufgabe H18.** Sei $J(n, 0) := (a_{ij}) \in K^{n,n}$ definiert durch

$$a_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } j = i + 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie alle $J(n, 0)$-invarianten Unterräume von $K^n$.

**Aufgabe H19.** Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $\dim(V) = n$. Angenommen $f$ ist nilpotent, d.h. $f^N = 0$ für ein $N > 0$. Sei $\mu_f$ das Minimalpolynom, und sei $\chi_f$ das charakteristische Polynom von $f$.

(i) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von $f$.

(ii) Wie sieht $\chi_f$ aus?

(iii) Ist $f$ trigonalisierbar?

(iv) Konstruieren Sie ein nilpotentes $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ mit $\mu_f \neq \chi_f$.

(v) Konstruieren Sie ein nilpotentes $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ mit $\mu_f = \chi_f$.

**Aufgabe H20.** Sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $\dim(V) = n \geq 1$.

(i) Sei $0 \neq v \in V$, und sei $p \in K[X]$ mit $p(f)(v) = 0$. Zeigen Sie: $p$ und $\chi_f$ sind nicht teilerfremd.

(ii) Zeigen Sie: Ist $\chi_f$ irreduzibel, und ist $0 \neq v \in V$, so ist $\{v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)\}$ eine Basis von $V$, und $0$ und $V$ sind die einzigen $f$-invarianten Unterräume von $V$.

*****************************************************************