$\boxed{4.}$ Übungsaufgaben LA II, SS 18

****

Hausaufgaben

Aufgabe H13. Es gibt 16 Matrizen in $K^{2,2}$, welche nur 0 und 1 als Einträge haben. Welche davon sind diagonalisierbar für $K = \mathbb{F}_2$ und welche für $K = \mathbb{R}$?

Aufgabe H14. Seien f und g Endomorphismen eines endlich-dimensionalen K-Vektorraums V mit $f^2 = \mathrm{Id}_V$ und $g^2 = c \cdot g$ für ein $c \in K^\times$.

(i) Bestimmen Sie die möglichen Eigenwerte von f und g.

Zeigen Sie:

(ii) g ist diagonalisierbar.

(iii) Falls $\mathrm{char}(K) \neq 2$, so ist f diagonalisierbar.

(iv) Die zusätzliche Voraussetzung in (iii) ist notwendig.

Bemerkung: Sie können die Übungen Ü3/H10 und Ü10/H40 (WiSe17/18) verwenden, wenn Sie sie zuvor gelöst haben.

Aufgabe H15. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und seien $f, g \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $f \circ g = g \circ f$. Zeigen Sie: Sind f und g diagonalisierbar, so gibt es eine Basis B von V, so dass $\mathbf{c}_{B,B}(f)$ und $\mathbf{c}_{B,B}(g)$ Diagonalmatrizen sind.

Aufgabe H16. Betrachten Sie die wie folgt rekursiv definierte Folge reeller Zahlen: $f_1 = f_2 := 1$, $f_{n+2} := f_{n+1} + f_n$. Man nennt f_n die n-te Fibonacci-Zahl. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie:

(i) $A \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix}$

(ii) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und finden Sie eine Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

(iii) Benutzen Sie (ii), um f_{1000} zu berechnen.

****