# $\boxed{2.}$ Übungsaufgaben LA II, SS 18

************************************************************************

## Hausaufgaben

**Aufgabe H5.** Seien $f, g \in K[X]$ mit $g \neq 0$. Dann gibt es $q, r \in K[X]$ mit $f = qg + r$ und $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(g)$. Geben Sie einen Algorithmus an, der $q$ und $r$ berechnet (mit Beweis), und konstruieren Sie einige aussagekräftige Beispiele.

**Aufgabe H6.** Sei $R \neq 0$ ein nullteilerfreier kommutativer Ring. (Einen solchen Ring nennt man auch **Integritätsbereich**.)

Zeigen Sie, dass $(f_1, g_1) \sim (f_2, g_2)$ genau dann wenn $f_1 g_2 = f_2 g_1$ eine Äquivalenzrelation auf $R \times (R \setminus \{0\})$ definiert. Sei $Q(R)$ die Menge der entsprechenden Äquivalenzklassen. Für $(f, g) \in R \times (R \setminus \{0\})$ bezeichnen wir die zugehörige Äquivalenzklasse mit

$$\frac{f}{g}.$$

Zeigen Sie, dass $Q(R)$ mit der durch

$$\frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2} := \frac{f_1 g_2 + g_1 f_2}{g_1 g_2}$$

und

$$\frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{f_2}{g_2} := \frac{f_1 f_2}{g_1 g_2}$$

induzierten Addition bzw. Multiplikation ein Körper ist. Man nennt $Q(R)$ den **Quotientenkörper** von $R$. (Sie müssen u.a. die Wohldefiniertheit von $+$ und $\cdot$ für $Q(R)$ beweisen.)

**Aufgabe H7.**

(i) Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome vom Grad $n \leq 4$ in $\mathbb{Z}_2[X]$.

(ii) Sei $(H, \cdot) := (\{1, 4, 8, 12, \dots\}, \cdot) = (\{1\} \cup 4\mathbb{N}_1, \cdot)$. Bestimmen Sie alle irreduziblen Elemente in $H$, und bestimmen Sie alle Primelemente in $H$.

**Aufgabe H8.** Sei $A \in K^{n,n}$. Wie immer fassen wir $A$ auch als Matrixabbildung $K^n \to K^n$ auf.

- (i) Seien $v$ und $w$ Eigenvektoren von $A$ mit verschiedenen Eigenwerten. Zeigen Sie: $v + w \neq 0$ und $v + w$ ist kein Eigenvektor von $A$.
- (ii) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
  - (a) Jeder Vektor $v \neq 0$ in $K^n$ ist Eigenvektor von $A$;
  - (b) $A = \lambda E_n$ für ein $\lambda \in K$.

************************************************************************