$\boxed{1.}$ Übungsaufgaben LA II, SS 18

****

Anwesenheitsaufgaben

Aufgabe A1. Sei p eine Primzahl, und sei $K = \mathbb{Z}_p$. Wieviele Elemente gibt es in $\mathrm{GL}_2(K)$?

Aufgabe A2. Sei p eine Primzahl, und sei $n \geq 1$. Wieviele 1-dimensionale Unterräume gibt es in $(\mathbb{Z}_p)^n$?

Aufgabe A3. Seien $a_1, \ldots, a_n$ Elemente aus K, welche nicht alle gleich 0 sind. Sei $A = (a_{ij}) \in K^{n,n}$ definiert durch $a_{ij} := a_i a_j$. Bestimmen Sie $\mathrm{Rang}(A)$.

Aufgabe A4. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Für welche Unterräume U von V gibt es einen Endomorphismus $f\colon V \to V$ mit

$$\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Bild}(f) = U?$$

Aufgabe A5. Sei $\dim(V) < \infty$, und sei $f \in \mathrm{End}_K(V)$. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $\mathrm{Kern}(f) \cap \mathrm{Bild}(f) = 0$;

(ii) $\mathrm{Rang}(f \circ f) = \mathrm{Rang}(f)$.

Aufgabe A6. Wie ist der Dualraum V^* von V definiert? Sein nun $V := K^3$, und sei

$$U := \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) \subset V.$$

Finden Sie $f_1, f_2 \in V^*$ mit $\mathrm{Kern}(f_1) \cap \mathrm{Kern}(f_2) = U$.

Aufgabe A7. Sei (V, s) ein euklidischer Vektorraum. Sei $f \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(V)$, so dass λf längentreu ist für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Seien $v, w \in V$ mit $v \perp w$. Zeigen Sie, dass dann $f(v) \perp f(w)$ gilt.

Aufgabe A8. Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $(\mathbb{R}^2, s^2)$. Sei

$$U := \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}) \subset \mathbb{R}^2.$$

Bestimmen Sie die orthogonale Projektion $p_U(v)$, wobei $v := \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

****

Hausaufgaben

Für jede Aufgabe gibt es 4 Punkte.

Aufgabe H1. Zeigen Sie: Jedes $\sigma \in S_n$ kann man als Produkt von höchstens

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

Transpositionen der Form σ_i schreiben, wobei $1 \leq i \leq n-1$.

Aufgabe H2. Sei $\sigma \in S_n$. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Aufgabe H3. Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen $A = (a_{ij}) \in K^{n,n}$ mit $a_{ij} = 0$ für alle (i,j) mit $2 \leq i \leq n$ und $n - i + 2 \leq j \leq n$.

Aufgabe H4. Seien

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

mit $v \neq w$, und sei $L := \{\lambda v + (1-\lambda) w \mid \lambda \in K\}$ die zugehörige affine Gerade. Zeigen Sie: Für

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

gilt $u \in L$ genau dann wenn

$$\det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & 1 \\ v_1 & v_2 & 1 \\ w_1 & w_2 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

****