$\boxed{12.}$ Übungsaufgaben LA II, SS 18

****

Hausaufgaben

Aufgabe H45. Sei (V, s) ein n-dimensionaler regulärer symmetrischer $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ein Unterraum U von V ist **positiv definit**, falls $\langle u, u\rangle > 0$ für alle $0 \neq u \in U$. Ein solches U ist **maximal positiv definit**, falls es keinen positiv definiten Unterraum W von V gibt mit $U \subset W$. Entsprechend definiert man **negative definite** Unterräume.

Sei nun U^+ ein maximal positiv definiter Unterraum von V, und sei $U^- := (U^+)^\perp$. Zeigen Sie:

(i) $V = U^+ \perp U^-$;
(ii) s_{U^+} und s_{U^-} sind regulär;
(iii) s_{U^-} is negativ definit;
(iv) $\dim(W^+) = \dim(U^+)$ für jeden maximal positiv definiten Unterraum W^+ von V.

Aufgabe H46. Angenommen (V, s) ist ein endlich-dimensional euklidischer Vektorraum. Betrachte die Sphäre

$$\mathrm{Sph}^r := \{v \in V \mid ||\, x\, || = r\}$$

mit Radius r. Zeigen Sie: Zu je zwei Elementen $v, w \in \mathrm{Sph}^r$ gibt es ein $f \in \mathrm{O}(V, s)$ mit $f(v) = w$.

Aufgabe H47. Sei (V, s) ein n-dimensionaler metrischer K-Vektorraum, und sei B eine geordnete Basis von V: Zeigen Sie

$$\mathrm{Rad}(V) = \mathbf{c}_B^{-1}(\mathrm{Kern}(\mathbf{c}_B(s)^T).$$

Konstruieren Sie ein (V, s) mit

$$\mathrm{Rad}(V) \neq \mathbf{c}_B^{-1}(\mathrm{Kern}(\mathbf{c}_B(s)).$$

Aufgabe H48. Lesen Sie das gesamte Skript und stellen Sie Fragen...

****